

AMR pour les équations d'Euler 1D



Louis Le Tarneac
Eurobios et CMLA

Projet SIMATOD
ANR + DGA (Programme ASTRID)

29 septembre 2012

Adaptative Mesh Refinement

Equations différentielles discrétisées sur un maillage.

Principe: raffiner automatiquement le maillage dans les zones à hauts gradients.

But:

gain de temps CPU à précision donnée de la solution.

gain de mémoire à précision donnée.

Difficultés:

Déterminer le mouvement du maillage.

Modifier les équations de la mécanique des fluides en conséquence.

Projet SIMATOD: Simulation de l'atténuation des ondes de détonation par des mousses acqueuses.



Mise en place d'une mousse autour d'un explosif.

La mousse est composée d'eau liquide, de vapeur d'eau et d'air.
L'atténuation de l'onde se fait en partie grâce au changement de phase.

Objectif: outil pleinement pertinent au regard de la physique en jeu (modèle bi-fluide avec changement de phase) et performant du point de vue industriel (temps de calcul raisonnable sur un PC standard).

Choix d'un modèle 1D avec symétrie sphérique.

Nécessité de mettre au point des techniques telles que l'AMR.

Les résultats suivants présentent le cas d'équations conservatives, le modèle des mousses demandera de plus amples développements.

Scéma numérique - équations conservatives

Modification du schéma de résolution: on veut intégrer:

$$\partial_t v + \partial_x F(v) = S(v) \quad (1)$$

sur des volumes à géométrie variable. On utilise:

$$\frac{d}{dt} \int_{K(t)} v(t) dx = \int_{K(t)} \partial_t v dx + \int_{K(t)} \partial_x(\omega v) dx \quad (2)$$

où ω désigne la vitesse du maillage. L'intégration de l'équation (1) sur un volume $K(t)$ donne:

$$\frac{d}{dt} \int_{K(t)} v(t) dx + \int_{K(t)} \partial_x(F(v) - \omega v) dx = \int_{K(t)} S(v) dx. \quad (3)$$

Méthode volumes finis: le flux à calculer aux nœuds du maillage n'est plus $F(v)$ mais $F(v) - \omega v$.

Calcul automatique du maillage

On utilise une fonction de contrôle ρ , dont la valeur est d'autant plus élevée que la fonction est abrupte.

Exemple pour une solution u :

$$\rho(x) = \sqrt{1 + \frac{1}{\alpha} \left(\frac{du}{dx} \right)^2}$$

On cherche un maillage $[x_1, x_2, \dots, x_N]$ tel que cette fonction de contrôle soit équilibrée:

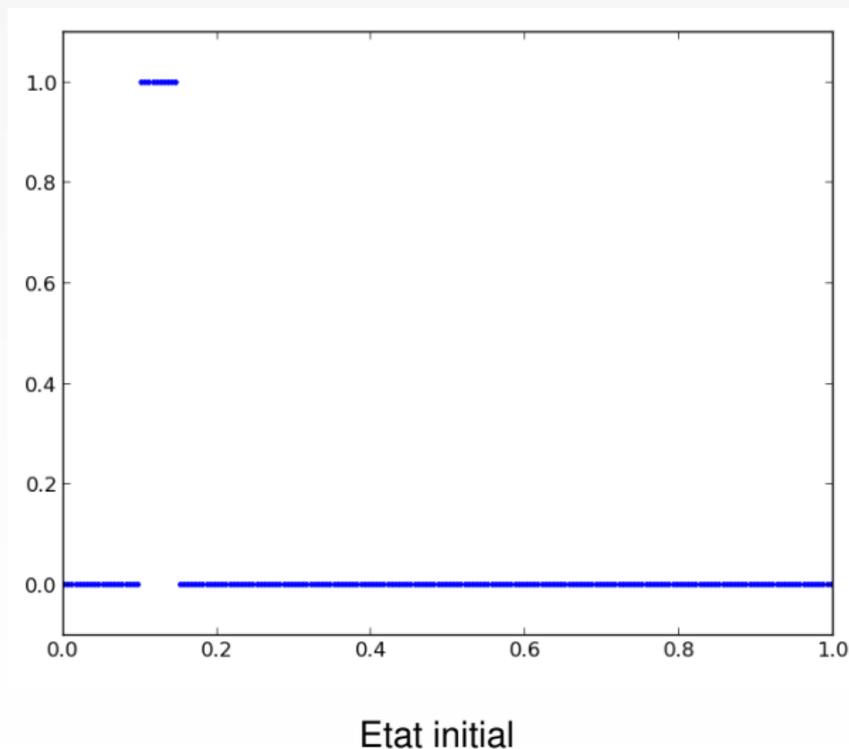
$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x) dx = \dots = \int_{x_{N-1}}^{x_N} \rho(x) dx.$$

Ce maillage est unique, il existe des algorithmes qui le calculent.

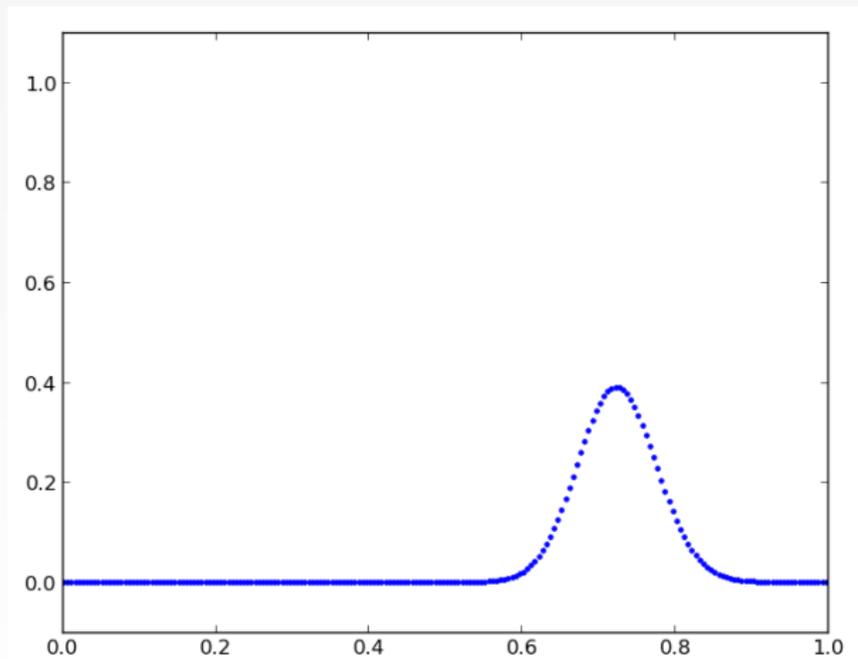
exemple: cas d'advection simple

$$u_t + cu_x = 0$$

Schéma VFFC explicite, $c = 1$, 200 cellules, $CFL = 0.2$

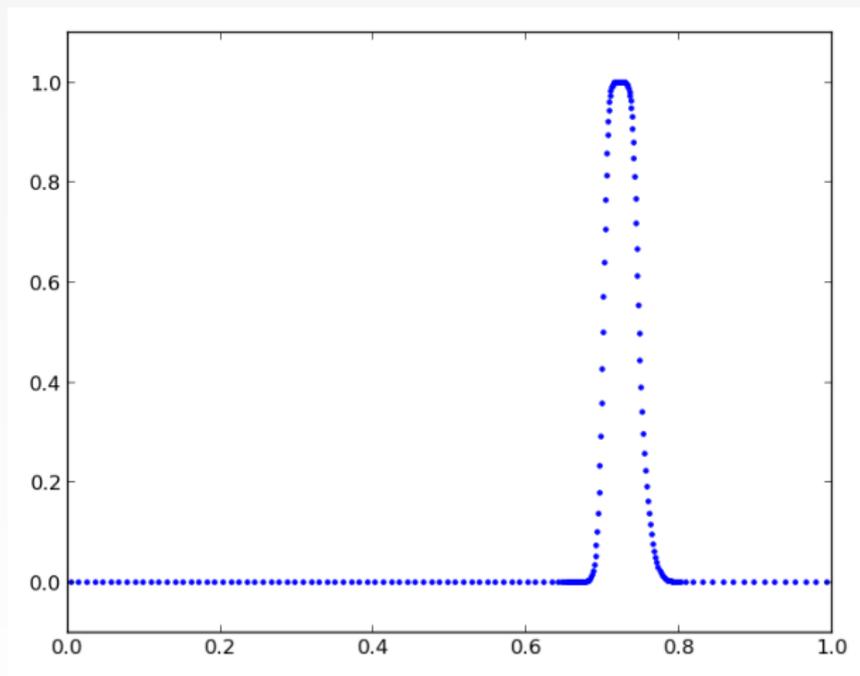


exemple: cas d'advection simple



Etat final sans AMR: diffusion numérique

exemple: cas d'advection simple



Etat final avec AMR

Problème: pour des questions de stabilité et de précision, le mouvement du maillage ne doit pas être trop violent.

Pour une méthode générale fonctionnant avec des modèles plus complexes, le calcul du maillage à l'instant $n + 1$ doit prendre en compte le maillage à l'instant n .

→ MMPDE (Moving Mesh Partial Differential Equation)

Le maillage à N points d'un domaine $[a, b]$ est vu comme une fonction $\epsilon(x)$ de $[0, 1]$ dans $[a, b]$. La coordonnée du i ème nœud du maillage est $\epsilon\left(\frac{i}{N}\right)$

Un maillage équidistribué minimise la fonctionnelle:

$$I(\epsilon) = \int_a^b \frac{1}{\rho(x)} \left(\frac{d\epsilon}{dx} \right)^2 dx \quad (4)$$

On peut trouver un maillage équidistribué par une méthode de descente:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t'} = \frac{P}{\tau} \frac{\partial I}{\partial \epsilon} \quad (5)$$

τ réel positif, P opérateur défini positif.

En choisissant P pour obtenir une équation simple, on obtient:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t'} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\epsilon}{dx} \right) \quad (6)$$

On discrétise et résout l'équation:

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial t'} = \frac{1}{\tau} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\rho} \frac{d\epsilon}{dx} \right)$$

Si la fonction de contrôle ρ ne dépend pas du temps, alors la solution de cette équation converge vers le maillage équilibré.

On obtient alors ϵ en fonction de x , à inverser.

On a une équation différentielle physique, en fonction du temps physique. Pour une solution physique fixée, on a une équation différentielle de maillage, qui évolue avec un paramètre t' .

Méthode pour contrôler le mouvement du maillage:

- solution physique: $t \rightarrow t + dt$
- On calcule la nouvelle fonction de contrôle
- solution du maillage: $t' \rightarrow t' + dt$

L'équation physique et l'équation du maillage progressent en même temps. On se dirige vers l'équidistribution mais on ne l'atteint pas. Le mouvement du maillage est contrôlé par le paramètre τ .

Ref: *Adaptive moving mesh methods*, Weizhang Huang (Author), Robert D. Russell (Author)

Equations d'Euler gaz parfait:

$$\partial_t(\rho) + \partial_x(\rho u) = 0$$

$$\partial_t(\rho u) + \partial_x(\rho u + p) = 0$$

$$\partial_t(\rho E) + \partial_x(\rho u E + p u) = 0$$

$$p = (\gamma - 1)\rho e$$

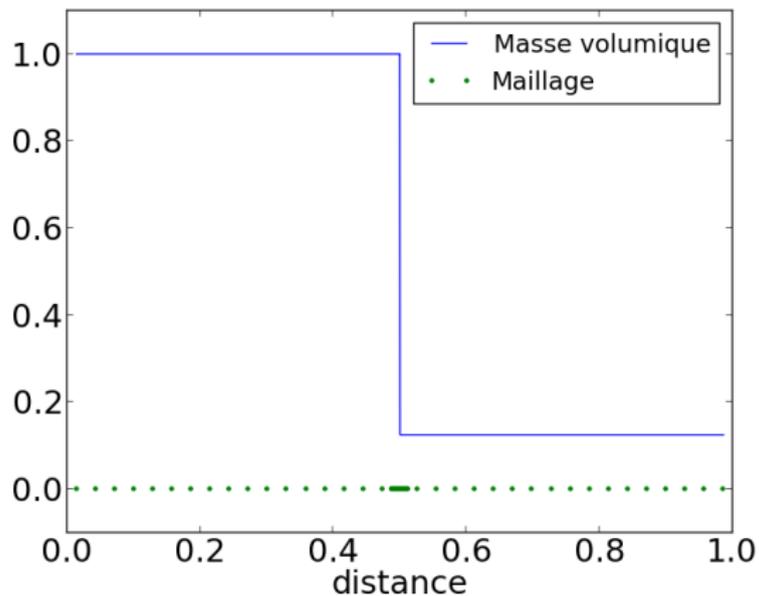
Cas test de Sod: domaine $[0,1]$

Si $x < 0.5$, $p = 1$, $\rho = 1$

Si $x > 0.5$, $p = 0.1$, $\rho = 0.125$

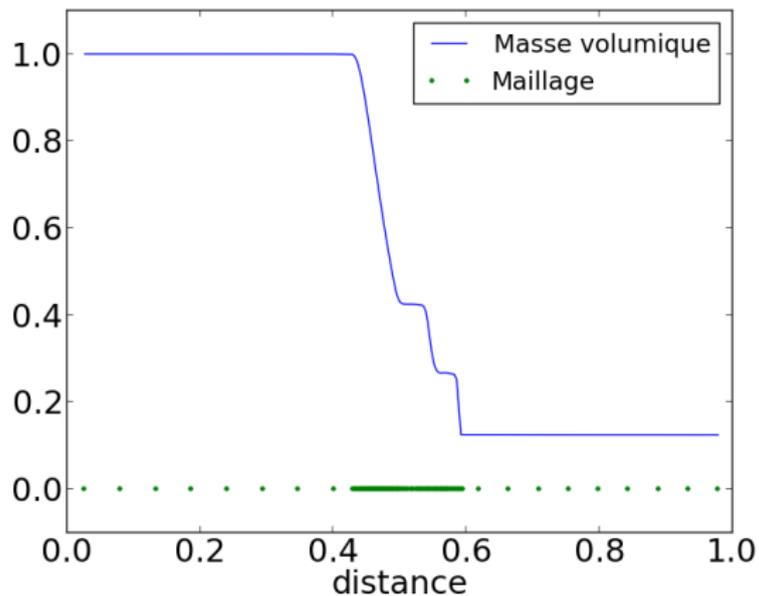
$\gamma = 1.4$

Cas test de Sod



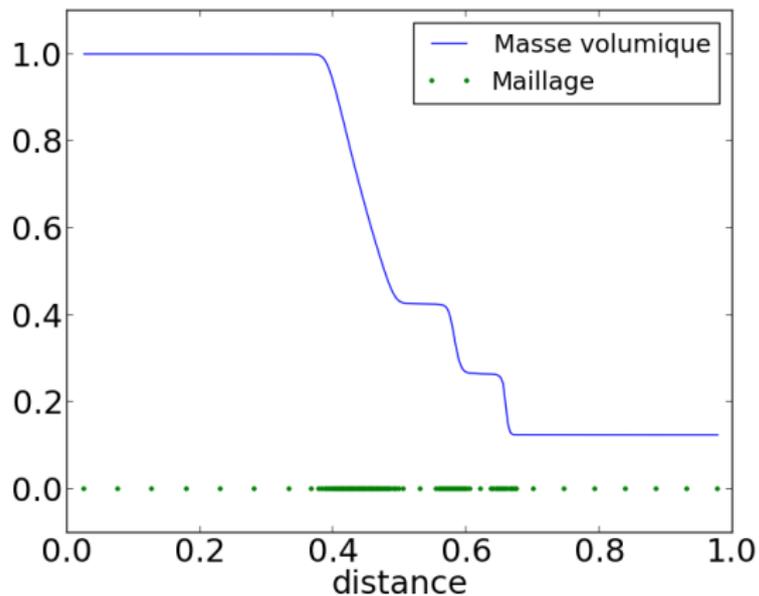
Etat initial

Cas test de Sod



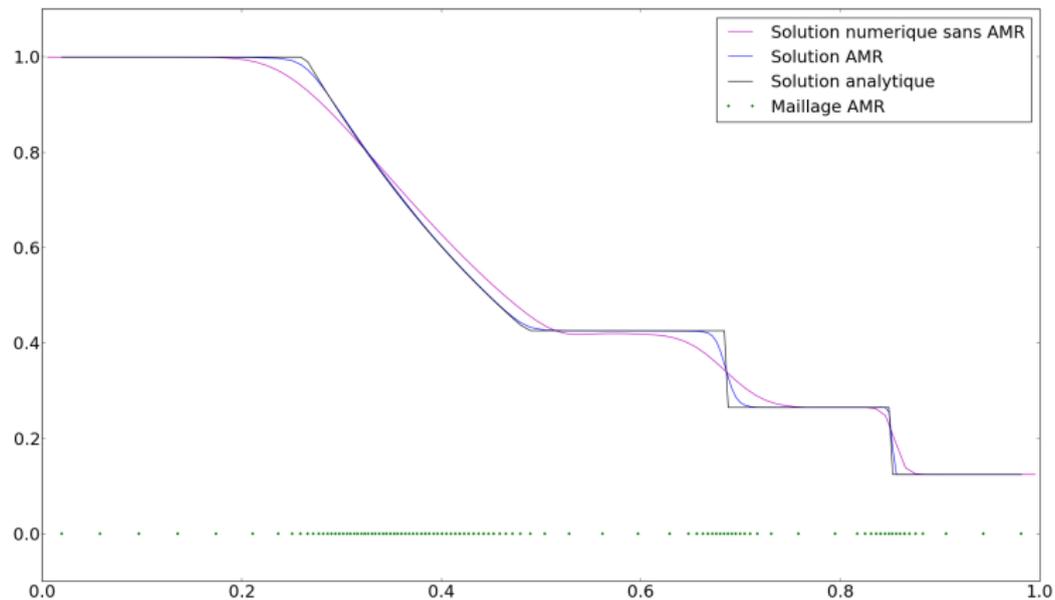
t=0.05

Cas test de Sod



$t=0.1$

Cas test de Sod



$t=0.2$

Comparaison des performances

100 cellules sans AMR: erreur = 19%, temps CPU = 0.52s

100 cellules AMR: erreur = 6.5%, temps CPU = 5,22s

Pour atteindre sans AMR la même précision, il faut 1000 cellules:
temps CPU = 34.42s

La méthode AMR offre un gain important en temps CPU.

Sa principale limite est l'apparition d'instabilités qui obligent à adoucir le mouvement du maillage par des méthodes complexes et à choisir des petits pas de temps.

La prochaine étape est sa mise en place sur des équations non conservatives, pour application à la simulation de l'atténuation des ondes de choc par des mousses. A suivre...