

DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE



Etudes autour des schémas numériques BBC et MYR

Christophe Fochesato, Renaud Motte
CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France
E-mail : renaud.motte@cea.fr

Introduction

Présentation des schémas

Comparaison théorique

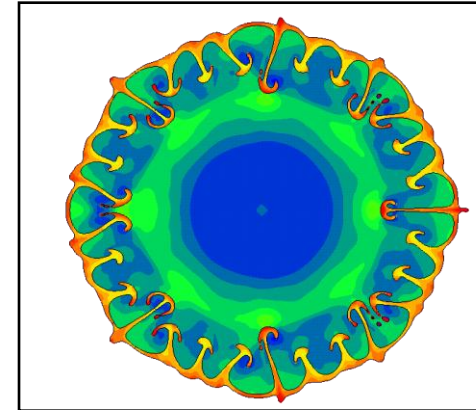
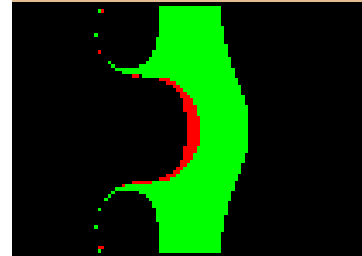
Comparaisons numériques

Conclusion

Introduction

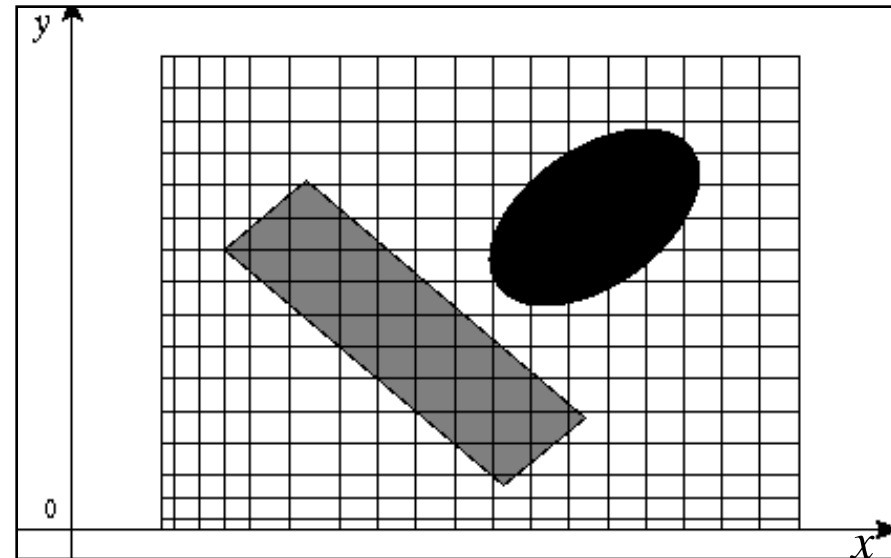
Contexte physique

- Fluides compressibles
- Ecoulements complexes
 - grandes déformations
 - multifluides
 - instationnaires



Contexte numérique

- Codes eulériens
 - grille cartésienne
 - multi-matériaux
 - Lagrange + Projection
 - Directions Alternées Chaloupées
 - reconstruction d'interfaces



Contexte industriel

- Modification de la physionomie des équipes de développement
 - Disparition progressive des « inventeurs » des schémas actuels
 - Arrivée de nouveaux ingénieurs
 - Effectifs contraints

- Evolution inéluctable de nos outils de simulation
 - Modèles physiques de plus en plus complexes
 - Emergence du 3D
 - Nouvelles architectures

- Occasion unique de revisiter les ingrédients de nos codes, au premier rang desquels figurent les schémas numériques

Objectifs

- Se réappropriier les schémas numériques actuels
- Comprendre les différences
 - entre les phases lagrangiennes de BBC et de MYR
 - entre BBC et MYR vis-à-vis de la projection
 - ...
- Les faire évoluer
 - méthodes des dominos, MOF
- En choisir un
- Voire, en changer
 - schémas centrés (EUCCLHYD)
 - schémas eulériens directs (VFFC-NIP)
 - ...

Comment ?

■ Rétro ingénierie

- Analyse UML des schémas hydro lagrangiens (R. Motte, Cargèse 2010)
- Projet Euler Non Conforme (L. Saas, Cargèse 2011)
- Séances « fil rouge »
 - Patrick Le Tallec
- Collaborations
 - CMLA-ENS Cachan (J.-M. Ghidaglia, F. De Vuyst)
 - IMT-Université Toulouse III (R. Loubère)
 - Université Paris VI (F. Nataf)

■ Contrats d'études

- Contrats HYDROVAL avec Eurobios : analyse BBC et MYR (2010-2011)
- Contrats CEA-IMT :
 - comparaison des schémas à vocation ALE (2009)
 - étude sur la projection (2009-2011)

■ Encadrement de stages sur l'étude de variantes de schémas numériques

- Stage M1 de Clément Mifsud : autour de BBC (2011)
- Stages M1 de Clémentine Courtès et Mélanie Inglard : autour de l'hydro lagrangienne (2012)

- Conventions de recherche *via* le LRC
 - Réinterprétation de BBC en schéma Lagrange-Flux (F. De Vuyst – C. Fochesato – R. Poncet)
 - article en cours de soumission
 - thèse co-encadrée

 - Méthode des sous-gradients (R. Loubère – C. Fochesato – R.Motte)
 - présentations dans des conférences
 - papier en cours de rédaction

Présentation des schémas

Historique

■ BBC

- Origine : schéma Lagrange VNR (1950)
- Extension Euler 1D : Woodward – Collela (1984)
- Extension Euler 2D : Bergeret (1989)

■ MYR

- Origine : schéma Lagrange VNR (1950)
- Extension Lagrange 2D : Wilkins (1964)
- Extension Euler 2D : Youngs, Rebourcet (1989)

Notations

{	ρ	masse volumique
	\vec{u}	vitesse
	e	énergie interne
	E	énergie totale par unité de masse ($E = e + \frac{1}{2} \vec{u} ^2$)
	P	pression

Equations

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0$$

$$\frac{\partial (\rho \vec{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{u} \otimes \vec{u}) + \vec{\nabla} P = \vec{0}$$

$$\frac{\partial (\rho e)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho e \vec{u} + P \vec{u}) = 0$$

$$P = P(\rho, e)$$

Phase Lagrange

- résolution du système sans les termes d'advection

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho(\nabla \cdot \vec{u}) = 0 \\ \rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \vec{\nabla} P = \vec{0} \\ \rho \frac{\partial e}{\partial t} + P(\nabla \cdot \vec{u}) = 0 \end{array} \right.$$

Projection

- phase d'advection (transport)

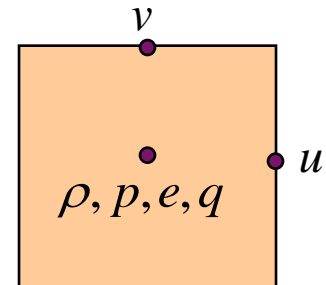
$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla} \rho = 0 \\ \frac{\partial(\rho \vec{u})}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla(\rho \vec{u}) = \vec{0} \\ \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} + \vec{u} \cdot \vec{\nabla}(\rho e) = 0 \end{array} \right.$$

BBC

- Quantités thermodynamiques aux mailles, vitesses normales aux arêtes

- Phase Lagrange

- Schéma en temps multi-pas
- Intégrations numériques sur géométrie fixe (à t^n)
- Déformation des mailles « en croix »
- Gradient et divergence par Différences Finies
- Masses nodales centrées sur arêtes = $\frac{1}{2}$ masses mailles
- Résolution en énergie interne et en PdV
- Viscosité artificielle constante par maille, en $\text{div } u$

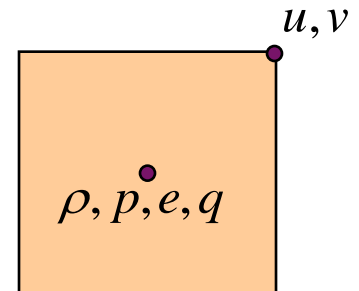


- Phase Projection

- Splitting directionnel
- Projections 1D d'ordre 2 par reconstruction linéaire limitée des pentes
- Projections par flux de masse aux arêtes
- Prise en compte des mailles duales pour les vitesses

MYR

- Quantités thermodynamiques aux mailles, vitesses aux nœuds
- Phase Lagrange
 - Schéma en temps prédicteur-correcteur
 - Intégrations numériques sur géométrie lagrangienne
 - Déformation des mailles réellement 2D
 - Gradient et divergence par Volumes Finis
 - Masses nodales centrées sur nœuds = $\frac{1}{4}$ masses mailles
 - Résolution en énergie interne et en PdV
 - Viscosité artificielle constante par maille, en div u
- Phase Projection
 - Splitting directionnel
 - Projections 1D d'ordre 2 par reconstruction linéaire limitée des pentes
 - Projections par flux de masse aux arêtes : moyenne des vitesses nodales
 - Prise en compte des mailles duales pour les vitesses



BBC : schéma en temps de la phase Lagrange

$$u_i^{n+1/4} = u_i^n - \frac{\Delta t}{4\tilde{m}_i(x_i^n)} \left(\int_{V(t)} \frac{\partial p}{\partial x} dv \right)_i (x_i^n, p_j^n)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} V_j^{n+1/2} = V_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{V(t)} \frac{\partial u}{\partial x} dv \right)_j (x_i^{n+1/4}, u_i^{n+1/4}) \\ \rho_j^{n+1/2} = \frac{m_j}{V_j^{n+1/2}} \\ e_j^{n+1/2} = e_j^n - \frac{\Delta t}{2m_j} \left(\int_{V(t)} p \frac{\partial u}{\partial x} dv \right)_j (x_i^{n+1/4}, p_j^n, u_i^{n+1/4}) \\ p_j^{n+1/2} = EOS(\rho_j^{n+1/2}, e_j^{n+1/2}) \\ u_i^{n+1/2} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\tilde{m}_i(x_i^n)} \left(\int_{V(t)} \frac{\partial p}{\partial x} dv \right)_i (x_i^n, p_j^{n+1/2}) \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\tilde{m}_i(x_i^n)} \left(\int_{V(t)} \frac{\partial p}{\partial x} dv \right)_i (x_i^n, p_j^{n+1/2}) \\ V_j^{n+1} = V_j^n + \Delta t \left(\int_{V(t)} \frac{\partial u}{\partial x} dv \right)_j (x_i^{n+1/2}, u_i^{n+1/2}) \\ \rho_j^{n+1} = \frac{m_j}{V_j^{n+1}} \\ e_j^{n+1} = e_j^n - \frac{\Delta t}{m_j} \left(\int_{V(t)} p \frac{\partial u}{\partial x} dv \right)_j (x_i^{n+1/2}, p_j^{n+1/2}, u_i^{n+1/2}) \\ p_j^{n+1} = EOS(\rho_j^{n+1}, e_j^{n+1}) \end{array} \right.$$

Phase Lagrange de MYR

MYR : schéma en temps de la phase Lagrange

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_i^* = x_i^n + \frac{\Delta t}{2} u_i^n \\
 V_j^* = V_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{V(t)} \frac{\partial u}{\partial x} dv \right)_j (x_i^n, u_i^n) \\
 \rho_j^* = \frac{m_j}{V_j^*} \\
 e_j^* = e_j^n - \frac{\Delta t}{2m_j} \left(\int_{V(t)} p \frac{\partial u}{\partial x} dv \right)_j (x_i^n, p_j^n, u_i^n) \\
 p_j^* = EOS(\rho_j^*, e_j^*)
 \end{array} \right.
 \quad
 \left\{ \begin{array}{l}
 u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\tilde{m}_i(x_i^*)} \left(\int_{V(t)} \frac{\partial p}{\partial x} dv \right)_i (x_i^*, p_j^*) \\
 u_i^* = \frac{1}{2} (u_i^n + u_i^{n+1}) \\
 x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t u_i^* \\
 V_j^{n+1} = V_j^n + \Delta t \left(\int_{V(t)} \frac{\partial u}{\partial x} dv \right)_j (x_i^*, u_i^*) \\
 \rho_j^{n+1} = \frac{m_j}{V_j^{n+1}} \\
 e_j^{n+1} = e_j^n - \frac{\Delta t}{m_j} \left(\int_{V(t)} p \frac{\partial u}{\partial x} dv \right)_j (x_i^*, p_j^*, u_i^*) \\
 p_j^{n+1} = EOS(\rho_j^{n+1}, e_j^{n+1})
 \end{array} \right.$$

BBC

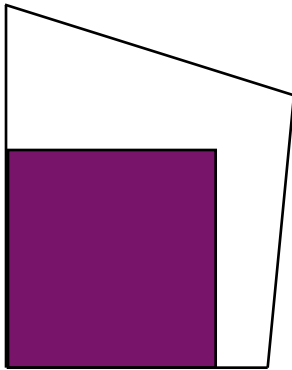


MYR

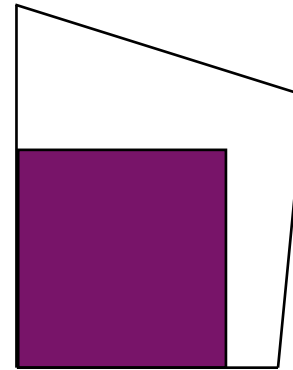


une maille eulérienne à t^n

BBC

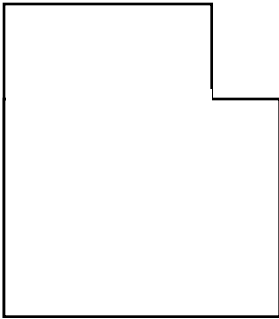


MYR

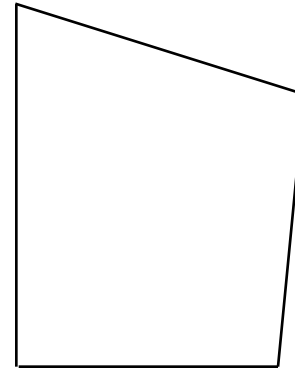


supposons une déformation 2D

BBC

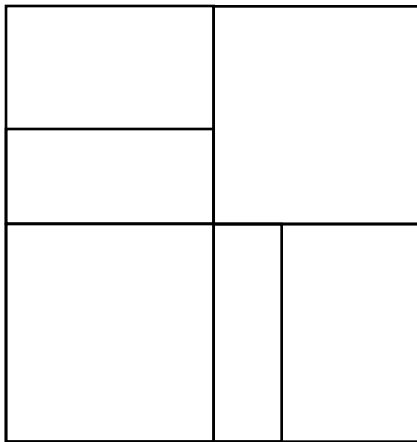


MYR

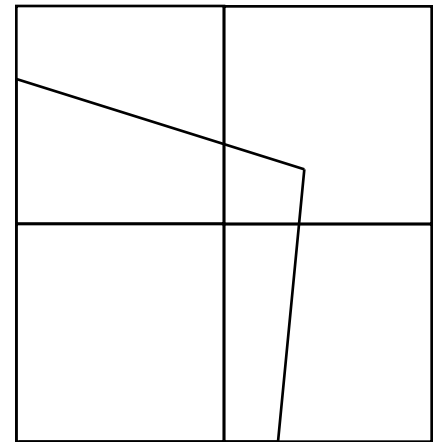


représentation différente de la variation de volume

BBC

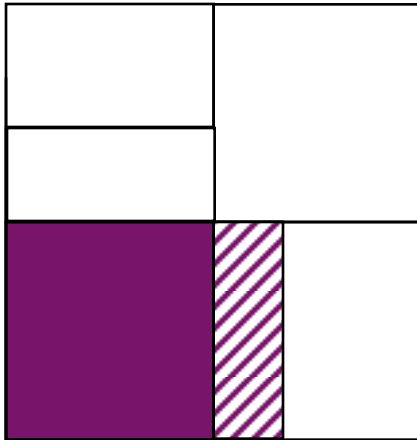


MYR

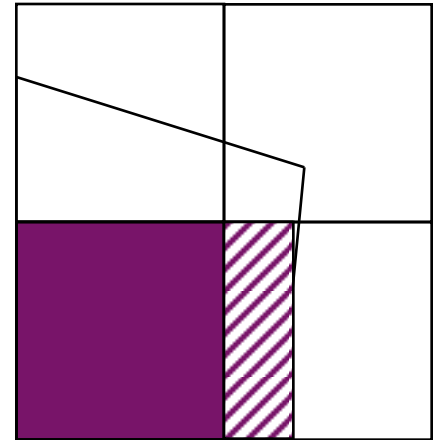


qu'on veut projeter sur la grille eulérienne

BBC

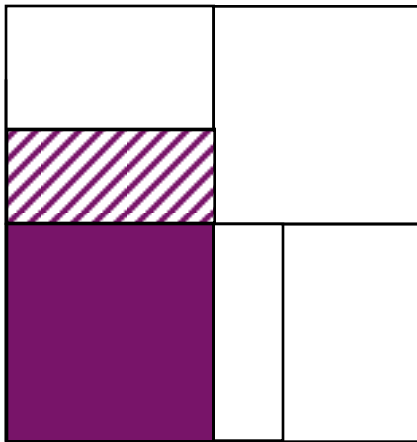


MYR

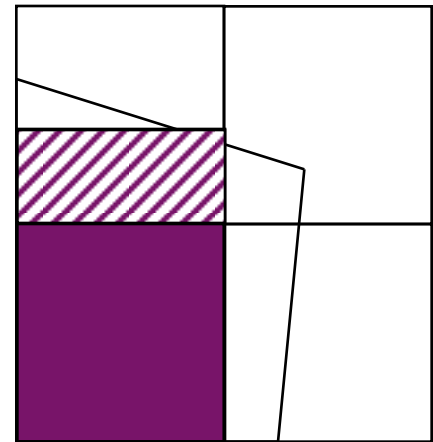


projection X

BBC



MYR

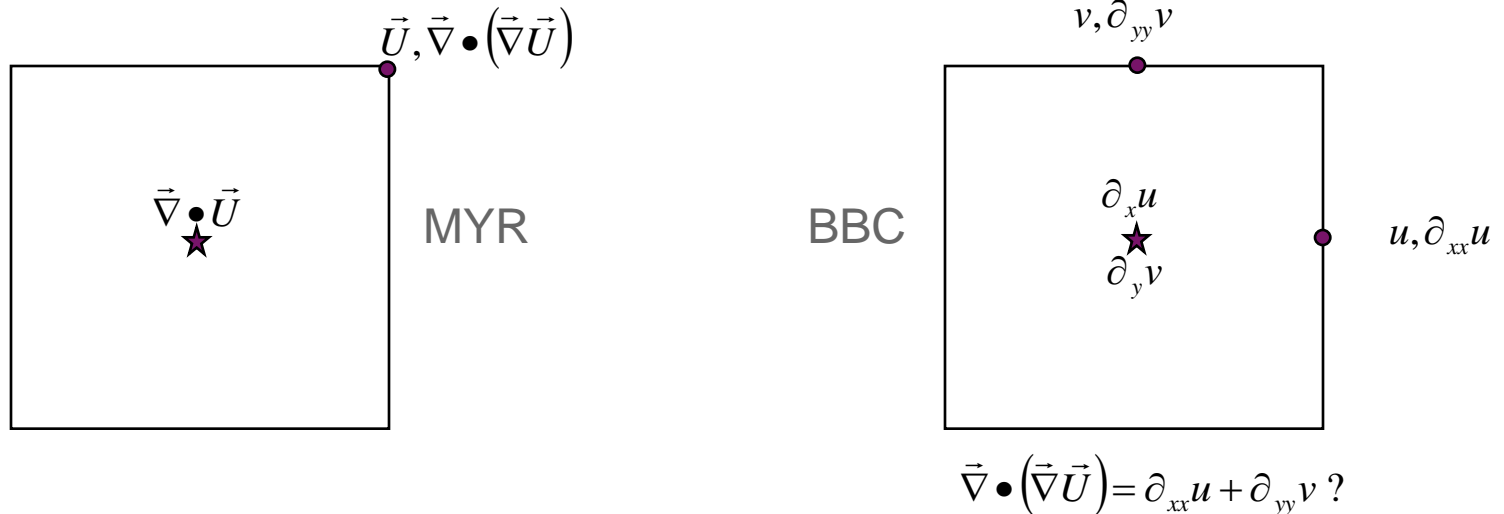


projection Y

Comparaison théorique

Vitesses aux nœuds ou aux arêtes

- Discrétisation naturelle des dérivées secondes avec les vitesses aux nœuds



- ddl de MYR naturels pour approcher solutions à champ de vitesse continues
 - Turbulence, viscosité, élastoplasticité, ...
- ddl de BBC naturels pour approcher solutions à champ de vitesse de composantes normales continues
 - hydrodynamique pure (avec pseudoviscosité en $\text{div } u \dots$)

Schéma temporel de la phase Lagrange

- Le prédicteur-correcteur de MYR est un schéma à 2 pas

$$\left\{ \begin{array}{l}
 x_i^{n+1/2} = x_i^n + \frac{\Delta t}{2} u_i^n \\
 V_j^{n+1/2} = V_j^n + \frac{\Delta t}{2} \left(\int_{V(t)} \frac{\partial u}{\partial x} dv \right)_j (x_i^n, u_i^n) \\
 \rho_j^{n+1/2} = \frac{m_j}{V_j^{n+1/2}} \\
 e_j^{n+1/2} = e_j^n - \frac{\Delta t}{2m_j} \left(\int_{V(t)} p \frac{\partial u}{\partial x} dv \right)_j (x_i^n, p_j^n, u_i^n) \\
 p_j^{n+1/2} = EOS(\rho_j^{n+1/2}, e_j^{n+1/2}) \\
 u_i^{n+1/2} = u_i^n - \frac{\Delta t}{2\tilde{m}_i^{n+1/2}(x_i^{n+1/2})} \left(\int_{V(t)} \frac{\partial p}{\partial x} dv \right)_i (x_i^{n+1/2}, p_j^{n+1/2})
 \end{array} \right.
 \quad
 \left\{ \begin{array}{l}
 u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\Delta t}{\tilde{m}_i(x_i^{n+1/2})} \left(\int_{V(t)} \frac{\partial p}{\partial x} dv \right)_i (x_i^{n+1/2}, p_j^{n+1/2}) \\
 x_i^{n+1} = x_i^n + \Delta t u_i^{n+1/2} \\
 V_j^{n+1} = V_j^n + \Delta t \left(\int_{V(t)} \frac{\partial u}{\partial x} dv \right)_j (x_i^{n+1/2}, u_i^{n+1/2}) \\
 \rho_j^{n+1} = \frac{m_j}{V_j^{n+1}} \\
 e_j^{n+1} = e_j^n - \frac{\Delta t}{m_j} \left(\int_{V(t)} p \frac{\partial u}{\partial x} dv \right)_j (x_i^{n+1/2}, p_j^{n+1/2}, u_i^{n+1/2}) \\
 p_j^{n+1} = EOS(\rho_j^{n+1}, e_j^{n+1})
 \end{array} \right.$$

- Il correspond au schéma en temps de BBC sans l'étape n+1/4
- Influence faible de cette étape pour quelques cas-tests académiques [stage C.Mifsud]
 - Précision/robustesse accrue à surcoût faible

MYR « vraie » phase Lagrange

- Pas d'ambigüité sur la définition des vitesses aux nœuds
 - Déformation lagrangienne des mailles
- Intégrations numériques sur géométrie lagrangienne

mais dégradation des données pour projeter par directions alternées

- Moyenne des vitesses pour estimer des flux de volume aux arêtes

BBC « pseudo » phase Lagrange

- Vraie phase Lagrange en 1D
- Ambiguïté sur la définition des vitesses aux nœuds
 - on ne peut pas suivre la déformation lagrangienne des mailles
- Intégrations numériques sur géométrie fixe
- Phase Lagrange d'ordre 2 [Hydroval III, 2012]

mais approprié pour projeter par ADI

- Ce sont des flux eulériens aux arêtes qui sont calculés dès la phase Lagrange
- Toute l'information est utilisée

Panorama des splittings

■ ALE : $\text{LagXY} - \text{ProjXY}$

■ BBC Woodward&Collela84 : $\text{LagX} - \text{ProjX} - \text{LagY} - \text{ProjY}$

■ BBC, MYR : $\text{LagXY} - \text{ProjX} - \text{ProjY}$

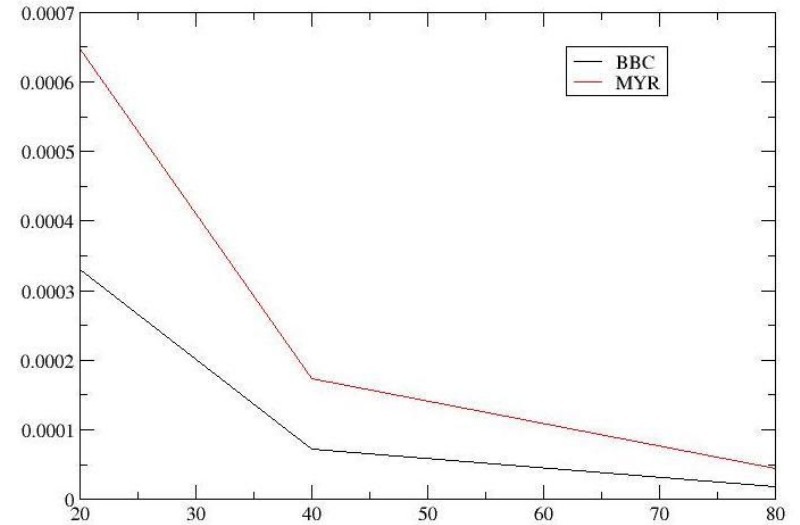
Comparaisons numériques

Cas-tests académiques

- Ordre 2 pour solutions régulières sans pseudoviscosité

- Vortex de Taylor-Green

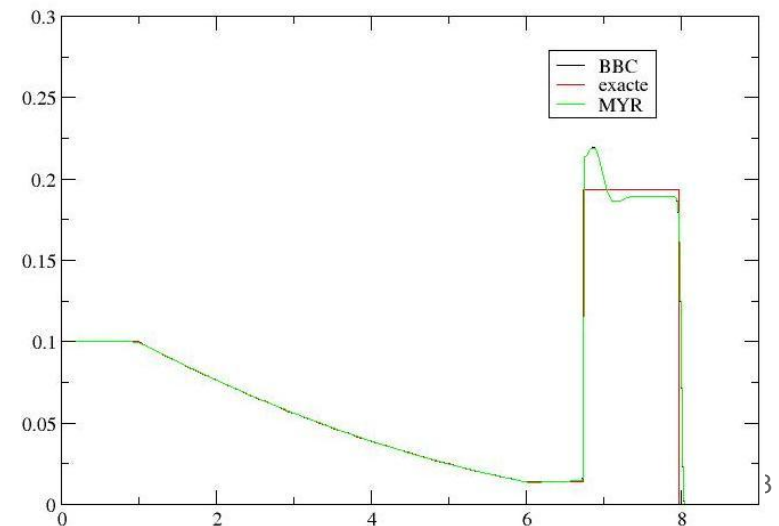
Erreur sur la densité pour le vortex de Taylor-Green en fonction de N



- Résultats 1D semblables

- Tube à choc de LeBlanc

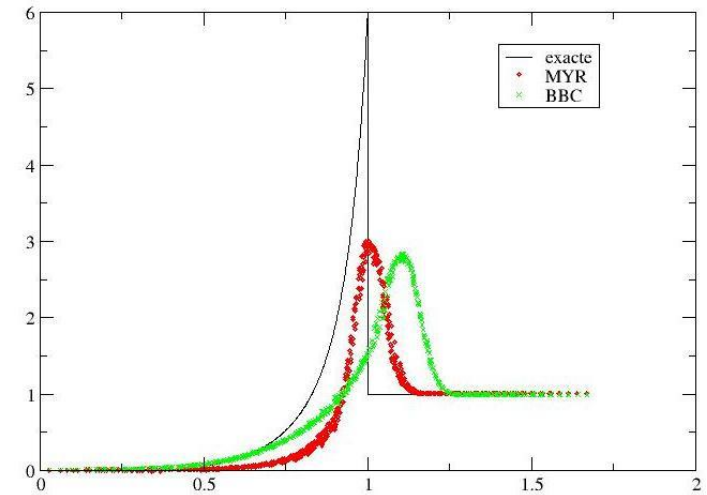
Energie interne - Tube à choc de LeBlanc



Cas-tests académiques

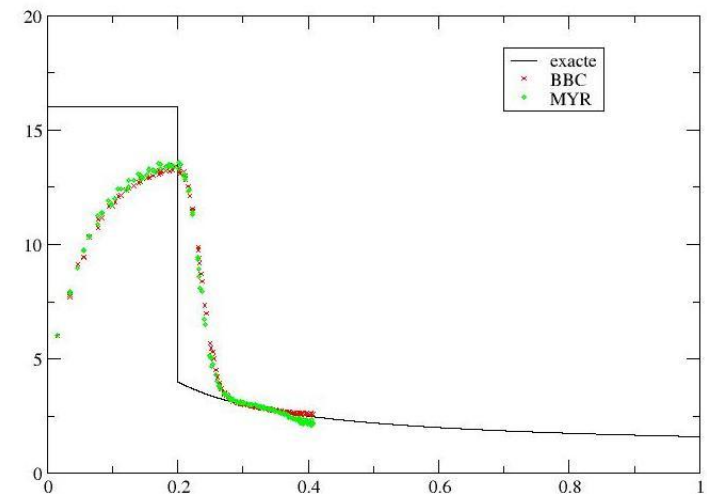
- MYR mieux sur cas de Sedov

densité en fonction du rayon pour le cas de Sedov



- Résultats similaires sur Noh

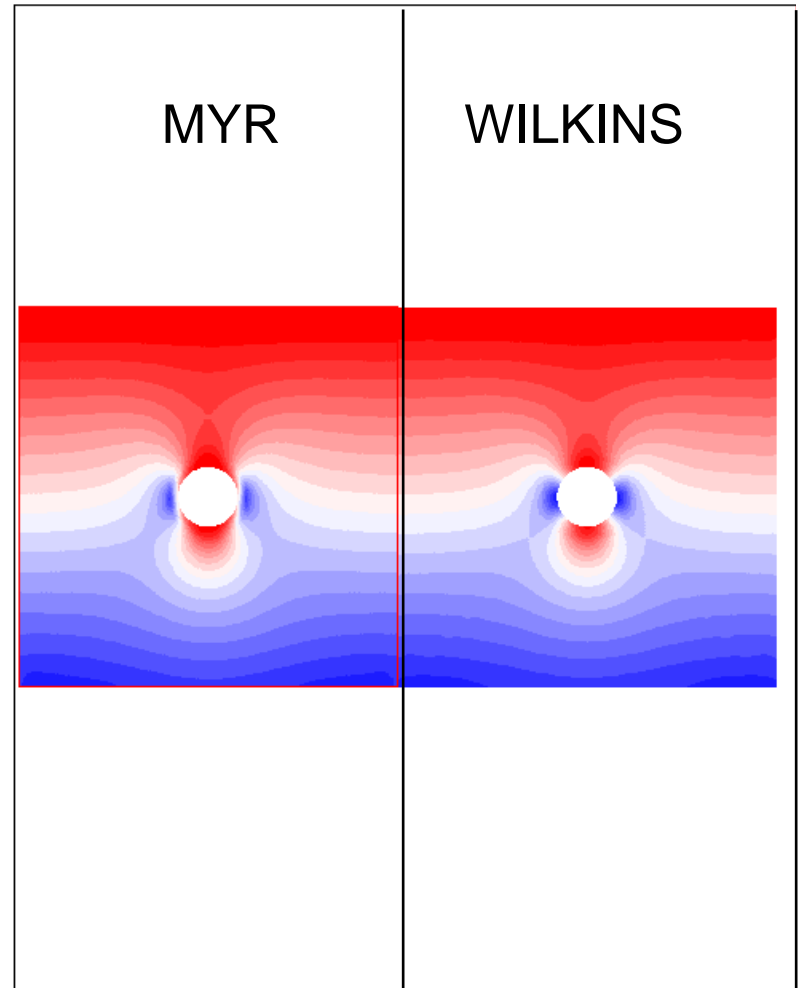
Densité en fonction du rayon pour le cas de Noh



Cas-test de validation

■ MYR équivalent au schéma Wilkins en élasto

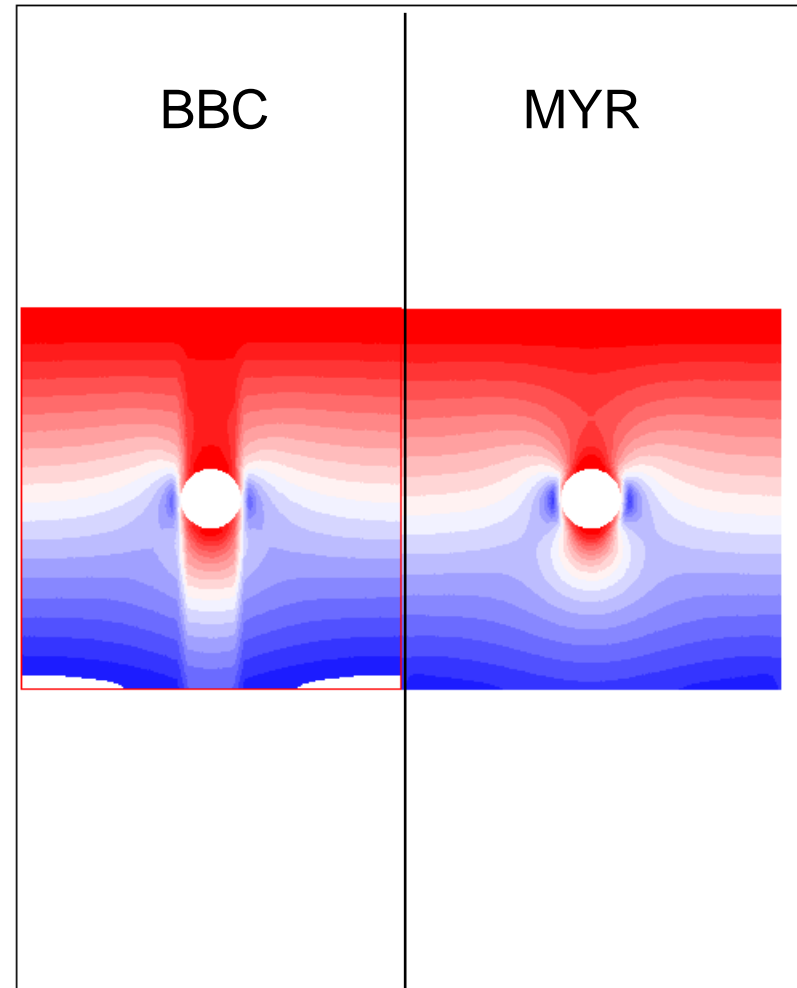
■ Contrainte lithostatique



Cas-test de validation

■ MYR meilleur que BBC en élasto

— Contrainte lithostatique



Conclusion

Bilan

- Des études ont été menées en interne et *via* des collaborations
- Elles ont permis d'exhiber des différences dans un socle commun
 - MYR plus naturel pour du vrai Lagrange-Projection 2D
 - Moins naturel que BBC en schéma eulérien par splitting directionnel
 - Discrétisation naturelle des opérateurs différentiels du second ordre avec MYR
- Si les résultats sont comparables en hydro (des différences à affiner), MYR est supérieur en élasto
- Comparer des schémas numériques reste un exercice difficile
 - Ils sont « problèmes dépendants »
 - Le fossé est immense entre les cas tests analytiques 1D et les applications industrielles

Perspectives

- Réinterprétation de BBC et thèse à venir sur Lagrange-Flux
- Questions autour de la convergence et de la conservation en énergie totale
- La vérification/validation des codes doit être repensée (tests unitaires, tests simples, mais plus représentatifs des applications industrielles → cf. ETSN 2012)
- Il faudra faire des compromis
 - Aménager la projection par directions alternées plutôt que de coder une vraie projection 2D/3D exacte, par exemple