

DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE



Réinterprétation des schémas eulériens de type Lagrange+Projection

Analyse des extensions 2D et multi-matériaux

Christophe Fochesato,
CEA, DAM, DIF, F-91297 Arpajon, France

01 OCTOBRE 2012

Introduction

Présentation des schémas BBC, MYR

Extension 2D

Extension multi-matériaux

Conclusion

Introduction

Introduction

- Schémas eulériens de type Lagrange+Projection
 - BBC, MYR, Godunov, PPM, ...

- En 1D
 - Projection peut être vue comme Advection par schéma VF de flux
 - En fait, les 2 étapes peuvent se réinterpréter en un schéma de flux
 - Voir exposé de F. de Vuyst et le formalisme Lagrange-Flux

- Questions :
 - Comment faire l'extension 2D ?
 - Comment faire l'extension multi-matériaux ?

- Constat :
 - Nous connaissons des schémas eulériens de type Lagrange+Projection 2D multimatériaux
 - On doit pouvoir les réinterpréter en schéma de flux

- Objectifs :
 - Mieux comprendre les splittings sous-jacents aux schémas BBC et MYR
 - Pistes pour les schémas Lagrange-Flux

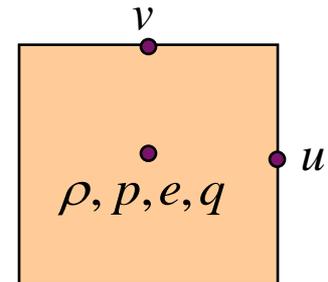
Présentation des schémas BBC, MYR

BBC

- Quantités thermodynamiques aux mailles, vitesses normales aux arêtes

- Phase Lagrange

- Schéma en temps multi-pas
- Intégrations numériques sur géométrie fixe (à t^n)
- Gradient et divergence par Différences Finies
- Masses nodales centrées sur arêtes = $\frac{1}{2}$ masses mailles
- Résolution en énergie interne et en PdV « compatible »
- Viscosité artificielle constante par maille, en $\text{div } u$

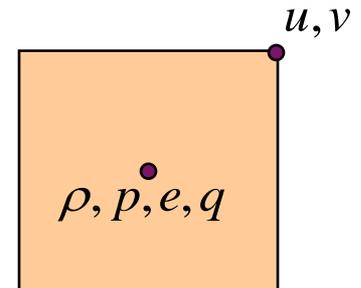


- Phase Projection

- Splitting directionnel
- Projections 1D d'ordre 2 par reconstruction linéaire limitée des pentes
- Projections par flux de masse aux arêtes
- Prise en compte des mailles duales pour les vitesses
- Prise en compte de la déformation 1D ou 2D des mailles lagrangiennes

MYR

- Quantités thermodynamiques aux mailles, vitesses aux noeuds
- Phase Lagrange
 - Schéma en temps prédicteur-correcteur
 - Intégrations numériques sur géométrie lagrangienne
 - Gradient et divergence par Volumes Finis
 - Masses nodales centrées sur noeuds = $\frac{1}{4}$ masses mailles
 - Résolution en énergie interne et en PdV « compatible »
 - Viscosité artificielle constante par maille, en $\text{div } u$
- Phase Projection
 - Splitting directionnel
 - Projections 1D d'ordre 2 par reconstruction linéaire limitée des pentes
 - Projections par flux de masse aux arêtes : moyenne des vitesses nodales
 - Prise en compte des mailles duales pour les vitesses
 - Prise en compte de la déformation 1D des mailles lagrangiennes



Extension 2D

Ce dont on ne parle pas ici...

- La discrétisation spatiale de la phase lagrangienne
- Les différences de mailles duales pour la projection des vitesses
- Les différences 2D plan / 2D axi

On parle de quoi alors ?

- Du splitting directionnel de la projection : ADI
 - Alternate Direction Integration
- Et comment elle est liée à la phase Lagrange

Un premier mot sur l'ADI...

- Il s'agit de projeter en X puis en Y,
- Pour limiter l'accumulation d'erreurs directionnelles dues au splitting, on inverse l'ordre au pas de temps suivant
 - Projection X, Projection Y, puis Projection Y, Projection X
- On peut mieux faire : splitting de Strang
 - Projection X de $Dt/2$, Projection Y, Projection X de $Dt/2$
- Tests numériques effectués par C.Mifsud (stage M1-2011)
 - Différences négligeables sur cas-tests de Sod, Kidder, advection vortex

Panorama des splittings

- Lagrange-Projection « pur » :

$$\text{LagXY} - \text{ProjXY}$$

- Euler direct :

$$\text{Flux}(\text{Lag}+\text{Adv})X - \text{Flux}(\text{Lag}+\text{Adv})Y$$

- BBC Woodward&Collela84 :

$$\text{LagX} - \text{ProjX} - \text{LagY} - \text{ProjY}$$

- BBC, MYR :

$$\text{LagXY} - \text{ProjX} - \text{ProjY}$$

Panorama des splittings

- Lagrange-Projection « pur » :

$$\text{LagXY} - \text{ProjXY}$$

- Euler direct :

$$\text{Flux}(\text{Lag}+\text{Adv})X - \text{Flux}(\text{Lag}+\text{Adv})Y$$

- BBC Woodward&Collela84 :

$$\text{LagX} - \text{ProjX} - \text{LagY} - \text{ProjY}$$

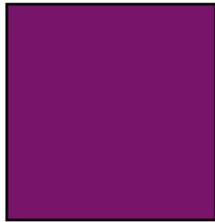
- BBC, MYR :

~~$$\text{LagXY} - \text{ProjX} - \text{ProjY}$$~~

- Vision trop restrictive pour comprendre les différences
 - BBC pas « vraie » phase Lagrange
 - Quelle déformation lagrangienne prendre en compte pour les projections 1D ?

BBC 2

Grandissement 2
(déformation lag. 2D)



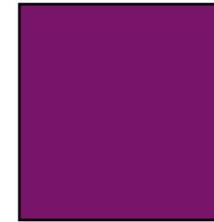
BBC 1

Grandissement 1
(déformation lag. 1D)



MYR

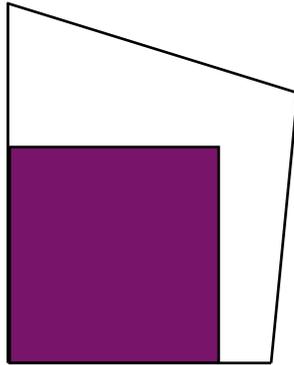
Grandissement 1
(déformation lag. 1D)



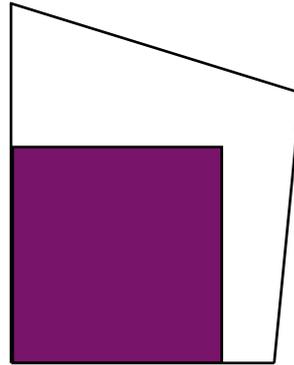
une maille eulérienne à t^n

Extension 2D

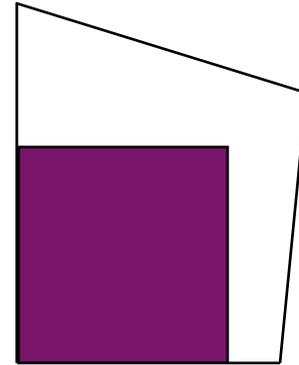
BBC 2



BBC 1

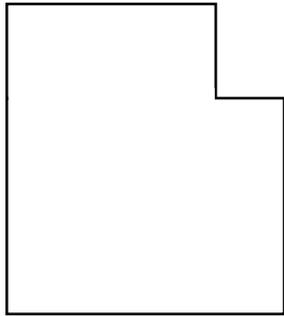


MYR

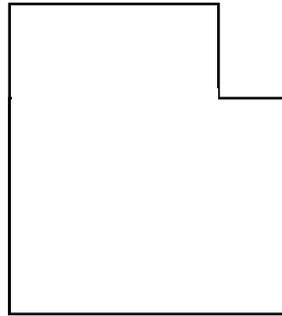


supposons une déformation 2D

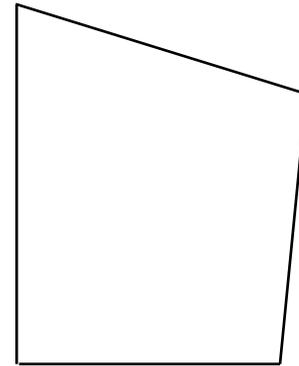
BBC 2



BBC 1

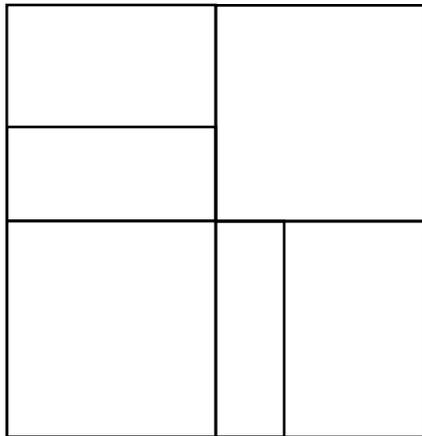


MYR

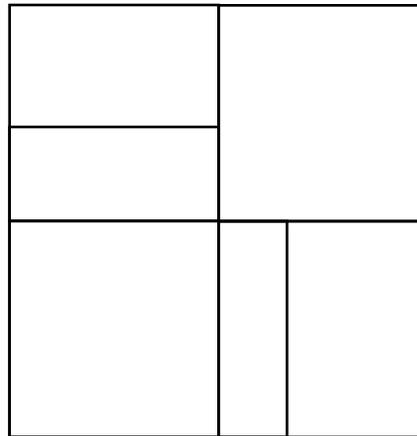


représentation différente de la variation de volume

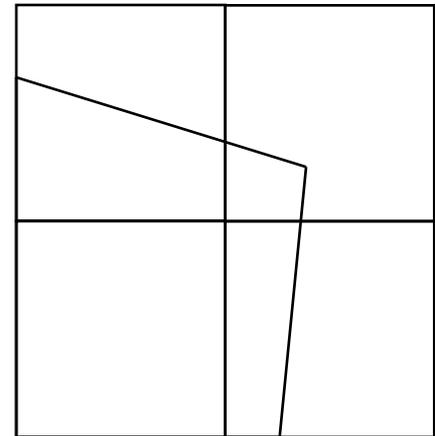
BBC 2



BBC 1

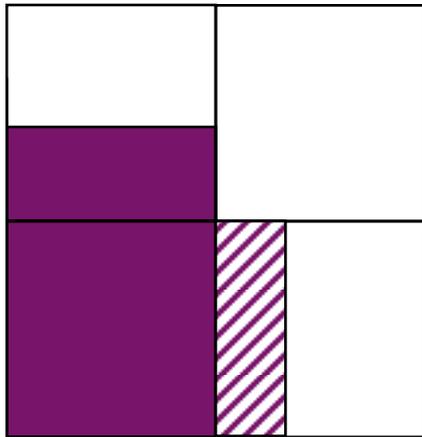


MYR

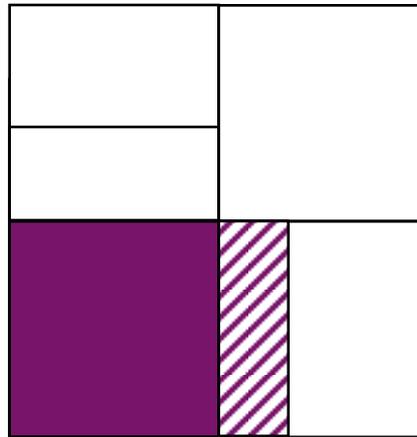


qu'on veut projeter sur la grille eulérienne

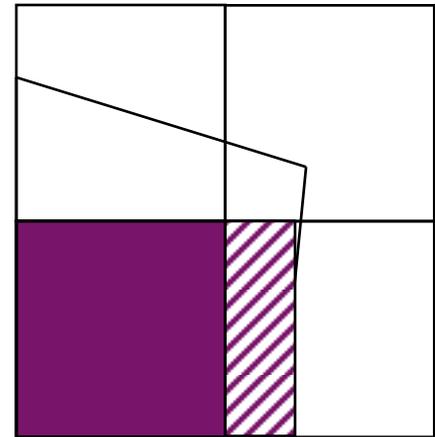
BBC 2



BBC 1

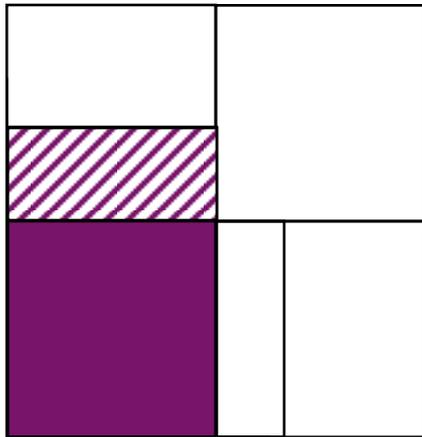


MYR

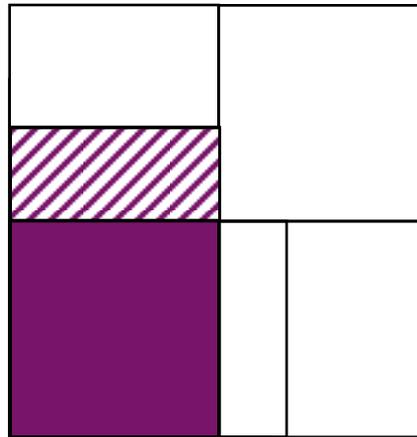


projection X

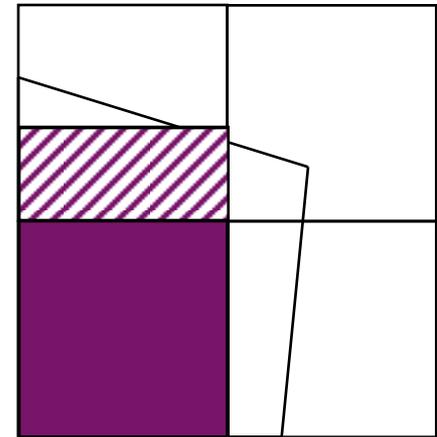
BBC 2



BBC 1



MYR



projection Y

Splitting grandissement 2D (BBC)

Phase Lagrange

1

in: $V^n, \rho^n, \underline{u}^n, e^n$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dx - \int_{V(t)} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} dx = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dx = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \underline{u} dx + \int_{V(t)} \underline{\nabla} p dx = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e dx + \int_{V(t)} p \underline{\nabla} \cdot \underline{u} dx = 0.$$

où $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}$ avec \underline{u} vitesse de la matière

out: $V^L, \rho^L, \underline{u}^L, e^L, \underline{u}^{L/2}$

Equations ALE non splittées

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} dx - \int_{V(t)} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} dx + \int_{\partial V(t)} (\underline{u} - \underline{v}) \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho dx + \int_{\partial V(t)} \rho (\underline{u} - \underline{v}) \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \underline{u} dx + \int_{V(t)} \underline{\nabla} p dx + \int_{\partial V(t)} \rho \underline{u} (\underline{u} - \underline{v}) \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho e dx + \int_{V(t)} p \underline{\nabla} \cdot \underline{u} dx + \int_{\partial V(t)} \rho e (\underline{u} - \underline{v}) \cdot \underline{n} ds = 0.$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}$ avec \underline{v} vitesse de grille

■ Attention: pas vraie phase Lagrange avec la discrétisation et DDL choisis...

Splitting grandissement 2D (BBC)

« projection X »

Phase d' advection selon X 2

in: $V^L, \rho^L, \underline{u}^L, e^L, \underline{u}^{L/2}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dx + \int_{\partial V_{D,G}} \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dx + \int_{\partial V_{D,G}} \rho \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \underline{u} dx + \int_{\partial V_{D,G}} \rho \underline{u} \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e dx + \int_{\partial V_{D,G}} \rho e \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0.$$

out: $V^X, \rho^X, \underline{u}^X, e^X$

« projection Y »

Phase d' advection selon Y 3

in: $V^X, \rho^X, \underline{u}^X, e^X, \underline{u}^{L/2}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dx + \int_{\partial V_{H,B}} \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dx + \int_{\partial V_{H,B}} \rho \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \underline{u} dx + \int_{\partial V_{H,B}} \rho \underline{u} \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e dx + \int_{\partial V_{H,B}} \rho e \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0.$$

out: $V^{n+1}, \rho^{n+1}, \underline{u}^{n+1}, e^{n+1}$

■ Attention: pas vraie phase Lagrange pour BBC

Splitting grandissement 1D (BBC ou MYR)

Phase Lagrange

1

in: $V^n, \rho^n, \underline{u}^n, e^n$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} dx - \int_{V(t)} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} dx = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dx = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \underline{u} dx + \int_{V(t)} \underline{\nabla} p dx = 0,$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho e dx + \int_{V(t)} p \underline{\nabla} \cdot \underline{u} dx = 0.$$

où $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{u} \cdot \underline{\nabla}$ avec \underline{u} vitesse de la matière

out: $V^L, \rho^L, \underline{u}^L, e^L, \underline{u}^{L/2}$

Equations ALE non splittées

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} dx - \int_{V(t)} \underline{\nabla} \cdot \underline{u} dx + \int_{\partial V(t)} (\underline{u} - \underline{v}) \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho dx + \int_{\partial V(t)} \rho (\underline{u} - \underline{v}) \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho \underline{u} dx + \int_{V(t)} \underline{\nabla} p dx + \int_{\partial V(t)} \rho \underline{u} (\underline{u} - \underline{v}) \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{D}{Dt} \int_{V(t)} \rho e dx + \int_{V(t)} p \underline{\nabla} \cdot \underline{u} dx + \int_{\partial V(t)} \rho e (\underline{u} - \underline{v}) \cdot \underline{n} ds = 0.$$

où $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}$ avec \underline{v} vitesse de grille

Extension 2D

Splitting grandissement 1D (MYR) : « projection X »

Prise en compte déformation 1D selon X 2

in: $V^n, \rho^n, \underline{u}^{L/2}$

$$\frac{d^x}{dt} \int_{V(t)} dx - \int_{V(t)} \frac{\partial u^{L/2}}{\partial x} dx = 0,$$

$$\frac{d^x}{dt} \int_{V(t)} \rho dx = 0,$$

où $\frac{d^x}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \begin{bmatrix} u \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \underline{\nabla}$ avec \underline{u} vitesse de la matière

out: $V^{L,x}, \rho^{L,x}$

Phase d'advection selon X 3

in: $V^{L,x}, \rho^{L,x}, \underline{u}^L, e^L, \underline{u}^{L/2}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dx + \int_{\partial V_{D,G}} \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dx + \int_{\partial V_{D,G}} \rho \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \underline{u} dx + \int_{\partial V_{D,G}} \rho \underline{u} \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e dx + \int_{\partial V_{D,G}} \rho e \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0.$$

out: $V^X = V^n, \rho^X, \underline{u}^X, e^X$

Splitting grandissement 1D (MYR) : « projection Y »

Prise en compte déformation 1D selon Y 4

in: $V^X = V^n, \rho^X, \underline{u}^{L/2}$

$$\frac{d^y}{dt} \int_{V(t)} dx - \int_{V(t)} \frac{\partial v^{L/2}}{\partial y} dx = 0,$$

$$\frac{d^y}{dt} \int_{V(t)} \rho dx = 0,$$

où $\frac{d^y}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \begin{bmatrix} 0 \\ v \end{bmatrix} \cdot \underline{\nabla}$ avec \underline{u} vitesse de la matière

out: $V^{L,y}, \rho^{L,y}$

Phase d'advection selon Y 5

in: $V^{L,y}, \rho^{L,y}, \underline{u}^X, e^X, \underline{u}^{L/2}$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V dx + \int_{\partial V_{H,B}} \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dx + \int_{\partial V_{H,B}} \rho \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho \underline{u} dx + \int_{\partial V_{H,B}} \rho \underline{u} \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho e dx + \int_{\partial V_{H,B}} \rho e \underline{u}^{L/2} \cdot \underline{n} ds = 0.$$

out: $V^{n+1}, \rho^{n+1}, \underline{u}^{n+1}, e^{n+1}$

Alors : grandissement 1 ou grandissement 2 ?

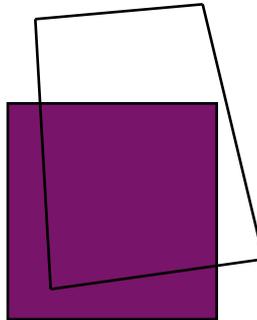
- L'Histoire a tranché pour BBC : grandissement 2 !
- Quelques tests numériques par C.Mifsud (Stage M1-2011)
 - Différences négligeables sur cas-tests Sod, Kidder, advection de vortex
- Et la masse ? Recalculée sur la déformation 1D si grandissement 1
- Et l'énergie ? Non recalculée
 - Perte contrôle dépôt d'entropie de la phase Lagrange si grandissement 1

Et par rapport au splitting total de Woodward et Colella ?

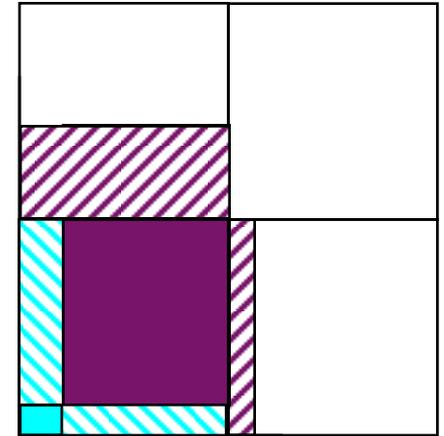
- Quelques tests numériques par C.Mifsud (Stage M1-2011)
 - Erreurs légèrement supérieures sur cas-tests Kidder et advection de vortex pour BBC Woodward-Colella

Vision géométrique pour BBC ?

- Pas toujours pertinente !



- Plutôt voir des flux aux faces...



Un autre regard sur les splittings BBC et MYR

■ BBC :

FluxLagXY + estimation VitesseAdv
FluxAdvX – FluxAdvY

■ MYR :

LAGXY => FluxLagXY + estimation VitesseAdv
FluxMasseLagX – FluxAdvX
FluxMasseLagY – FluxAdvY

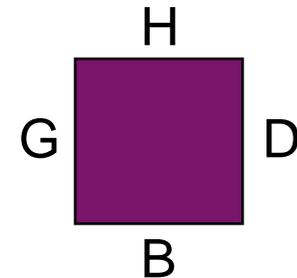
- Phase Lagrange fournit les flux « hors advection » + une estimation précise de la vitesse d'advection (et automatique du sens de l'information)
 - mieux on résoud l'hydro. Lag., plus précises seront ces infos
- Description des splittings en mono-matériau...

L'équation de conservation de la masse BBC

- Extension 2D de la réinterprétation de BBC [de Vuyst *et al.* 2012]

$$\rho^{n+1} = \rho^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left([\rho^L]_D^+ u_D - [\rho^L]_G^+ u_G \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left([\rho^X]_H^+ u_H - [\rho^X]_B^+ u_B \right)$$

- u est la vitesse de flux donnée par la phase Lagrangienne à $t^{n+1/2}$
 - Moyenne des vitesses aux nœuds pour MYR

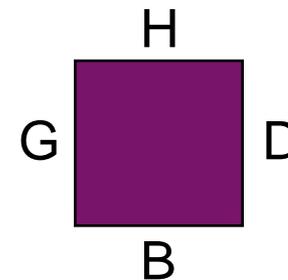


L'équation de conservation de la masse MYR

- Réinterprétation de MYR ou BBC grandissement 1

$$\rho^{n+1} = \rho^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left([\rho^{L,x}]_D^+ u_D - [\rho^{L,x}]_G^+ u_G \right) - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left([\rho^{L,y}]_H^+ u_H - [\rho^{L,y}]_B^+ u_B \right)$$

- u est la vitesse de flux donnée par la phase Lagrangienne à $t^{n+1/2}$



Extension multi-matériaux

Ce dont on ne parle pas ici...

- Les modèles de fermeture des mailles mixtes dans la phase lagrangienne
- La possibilité d'avoir une autre hypothèse que l'isodéformation

On parle de quoi alors ?

- Equation discrète de l'évolution de la fraction volumique
- Schéma de flux exhibé pour la conservation de la masse

Evolution de la fraction volumique sous-jacente

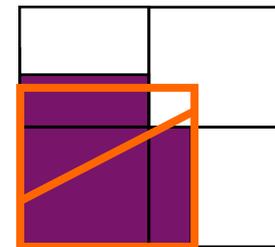
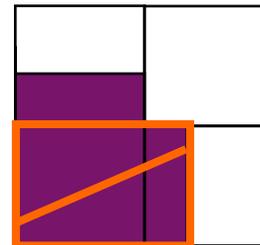
- Grandissement 2 :

$$f_{\alpha}^{n+1} = f_{\alpha}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(f_{\alpha}^n - \delta \mathcal{R}_D(f_{\alpha}^L)) u_D - (f_{\alpha}^n - \delta \mathcal{R}_G(f_{\alpha}^L)) u_G \right] + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[(f_{\alpha}^n - \delta \mathcal{R}_H(f_{\alpha}^X)) u_H - (f_{\alpha}^n - \delta \mathcal{R}_B(f_{\alpha}^X)) u_B \right]$$
- Grandissement 1 :

$$f_{\alpha}^{n+1} = f_{\alpha}^n + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[(f_{\alpha}^n - \delta \mathcal{R}_D(f_{\alpha}^{L,x})) u_D - (f_{\alpha}^n - \delta \mathcal{R}_G(f_{\alpha}^{L,x})) u_G \right] + \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[(f_{\alpha}^n - \delta \mathcal{R}_H(f_{\alpha}^{L,y})) u_H - (f_{\alpha}^n - \delta \mathcal{R}_B(f_{\alpha}^{L,y})) u_B \right]$$
- ATTENTION ! Reconstruction d'interface différente
 $\delta \mathcal{R}_{ARETE}(f_{\alpha}^*)$ proportion du matériau ayant flué par rapport au flux de volume,

- Grandissement 2 : reconstruction effectuée sur maille de volume V^{lag} , rectangularisée

- Grandissement 1 : effectuée sur maille déformée 1D



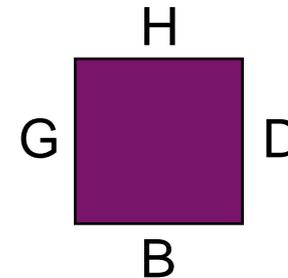
L'équation de conservation de la masse Grandissement 2

- Extension multi-matériaux de la réinterprétation de BBC [de Vuyst *et al.* 2012]
 - avec hypothèse d'isodéformation pendant phase Lagrange

$$\rho_\alpha^{n+1} = \rho_\alpha^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\beta_{\alpha,D}^L [\rho_\alpha^L]_D^+ + (1 - \beta_{\alpha,D}^L) \rho_\alpha^{n+1} \right) u_D - \left(\beta_{\alpha,G}^L [\rho_\alpha^L]_G^+ + (1 - \beta_{\alpha,G}^L) \rho_\alpha^{n+1} \right) u_G \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\left(\beta_{\alpha,H}^X [\rho_\alpha^X]_H^+ + (1 - \beta_{\alpha,H}^X) \rho_\alpha^{n+1} \right) u_H - \left(\beta_{\alpha,B}^X [\rho_\alpha^X]_B^+ + (1 - \beta_{\alpha,B}^X) \rho_\alpha^{n+1} \right) u_B \right]$$

où

$$\beta_{\alpha,ARETE}^* = \frac{\delta \mathcal{R}_{ARETE}(f_\alpha^*)}{f_\alpha^n}$$



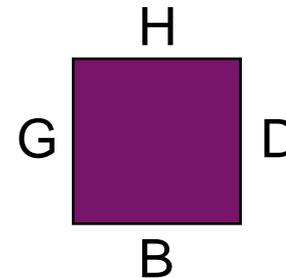
L'équation de conservation de la masse Grandissement 2

- Extension multi-matériaux de la réinterprétation de BBC [de Vuyst *et al.* 2012]
 - avec hypothèse d'isodéformation pendant phase Lagrange

$$\rho_\alpha^{n+1} = \rho_\alpha^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\beta_{\alpha,D}^L [\rho_\alpha^L]_D^+ + (1 - \beta_{\alpha,D}^L) \rho_\alpha^{n+1} \right) u_D - \left(\beta_{\alpha,G}^L [\rho_\alpha^L]_G^+ + (1 - \beta_{\alpha,G}^L) \rho_\alpha^{n+1} \right) u_G \right] \\ - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\left(\beta_{\alpha,H}^X [\rho_\alpha^X]_H^+ + (1 - \beta_{\alpha,H}^X) \rho_\alpha^{n+1} \right) u_H - \left(\beta_{\alpha,B}^X [\rho_\alpha^X]_B^+ + (1 - \beta_{\alpha,B}^X) \rho_\alpha^{n+1} \right) u_B \right]$$

où

$$\beta_{\alpha,ARETE}^* = \frac{\delta \mathcal{R}_{ARETE}(f_\alpha^*)}{f_\alpha^n}$$



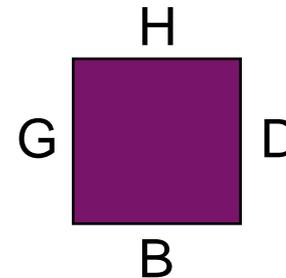
L'équation de conservation de la masse Grandissement 1

- Extension multi-matériaux de la réinterprétation en schéma de flux
 - avec hypothèse d'isodéformation pendant phase Lagrange

$$\rho_\alpha^{n+1} = \rho_\alpha^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[\left(\beta_{\alpha,D}^{L,x} [\rho_\alpha^{L,x}]_D^+ + (1 - \beta_{\alpha,D}^{L,x}) \rho_\alpha^{n+1} \right) u_D - \left(\beta_{\alpha,G}^{L,x} [\rho_\alpha^{L,x}]_G^+ + (1 - \beta_{\alpha,G}^{L,x}) \rho_\alpha^{n+1} \right) u_G \right] - \frac{\Delta t}{\Delta y} \left[\left(\beta_{\alpha,H}^{L,y} [\rho_\alpha^{L,y}]_H^+ + (1 - \beta_{\alpha,H}^{L,y}) \rho_\alpha^{n+1} \right) u_H - \left(\beta_{\alpha,B}^{L,y} [\rho_\alpha^{L,y}]_B^+ + (1 - \beta_{\alpha,B}^{L,y}) \rho_\alpha^{n+1} \right) u_B \right]$$

où

$$\beta_{\alpha,ARETE}^* = \frac{\delta \mathcal{R}_{ARETE}(f_\alpha^*)}{f_\alpha^n}$$



Conclusion

Résumé

- Description de schémas eulériens de type Lagrange-Projection 2D / multi-matériaux
- Compréhension des splittings Lagrange / Projection / ADI
- Réinterprétation en schémas eulériens Volumes Finis avec explicitation des flux

Perspectives

- Utiliser ce formalisme pour faire MYR – grandissement 2 et éviter la perte de contrôle sur le dépôt d'entropie
- Utiliser ce nouveau point de vue pour proposer une évolution des schémas
 - Plus précise que le splitting directionnel actuel
 - Moins chère que de la projection 2D par intersection exacte
- Éléments pour la construction de schémas Lagrange-Flux 2D multi-matériaux