

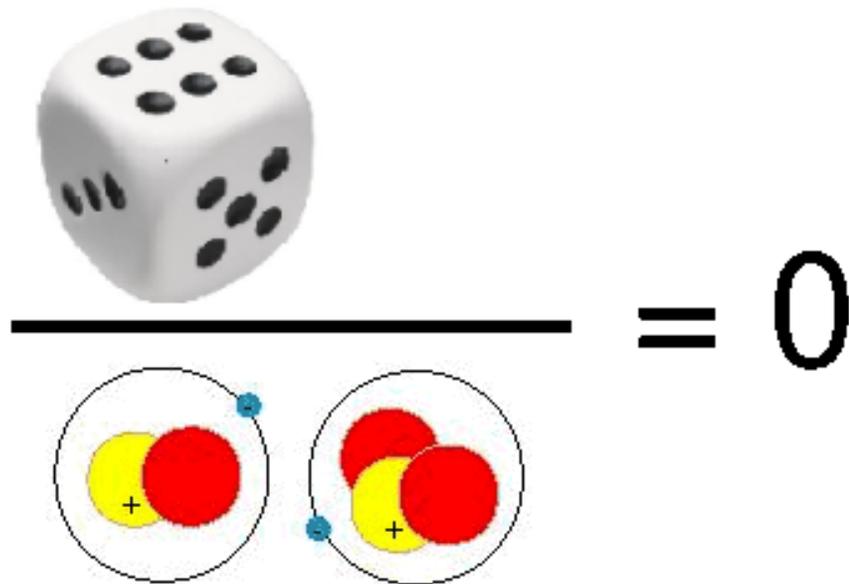
Un exercice de style sur l'advection

Bernard Rebourcet
CEA-DIF





Advection





Introduction

Cadre : schémas eulériens DF, grille structurée.

Historique :

1. trajectographie de marqueurs (méthodes PIC...),
2. méthodes des cellules donneuses (Donor cell),
3. limiteurs de flux et de pentes (MUSCL ...),
4. méthodes de flux corrigées (SHASTA).

Cadre spécifique : schémas eulériens ou grille variable, DF-VF, multimatériau, lagrange-projection.

1. Phase lagrange : les équations de conservation sont résolues dans le repère attaché à la matière. (méthodes PIC...),
2. Phase Projection = advection, du repère de la matière on passe au repère du laboratoire. On advecte, transporte, transfère, projette les quantités d'intérêt qui sont ainsi actualisées sur la grille de calcul.



Introduction suite

Points clefs :

- **Splitting** entre edp - complexes, multiD, pb dépendantes de la phase lagrange - et équations d'advection scalaires, génériques, et généralement 1D (ADI).
- **Schémas numériques distincts-disjoints** pour les deux phases.

... un horizon sans fin s'ouvre à nous !



Introduction... *encore*

La méthode MUSCL, la plus utilisée, est basée sur une augmentation du degré du polynôme.

Représentation affine non unique respectant : conservativité et sens de variation du profil.

Moultypes variantes diffèrent par la valeur de la pente du segment, valeur dépendant du pas d'espace, du nombre de courant et des dérivées spatiales de la quantité au voisinage de la maille.

La dérivée d'une quantité q dans la maille Ω_c , de sommets v_g et v_d est donné par :

$$(1) \quad \left. \frac{\delta q}{\delta x} \right|_c = \Phi(r) \left. \frac{\delta q}{\delta x} \right|_g$$

où $\Phi(r)$ est le limiteur de pente et $r = \left(\left. \frac{\delta \varphi}{\delta x} \right|_d \right) \left(\left. \frac{\delta \varphi}{\delta x} \right|_g \right)^{-1}$.

On distingue des limiteurs **compressifs** honnis des applications des limiteurs **diffusifs** préférés pour leur douceur.



...

... le César d'Honneur des limiteurs est attribué à :

$$\text{Van Leer hamonique } \Phi_{vlh}(r) = \frac{2r}{1+r} !$$

Au CEA des études s(ont) (été) menées :

1. les développements analytiques initiés par Daniel Bouche,
2. des formulations discrètes très précises (Del Pino, Jourdren, Jaouen...)

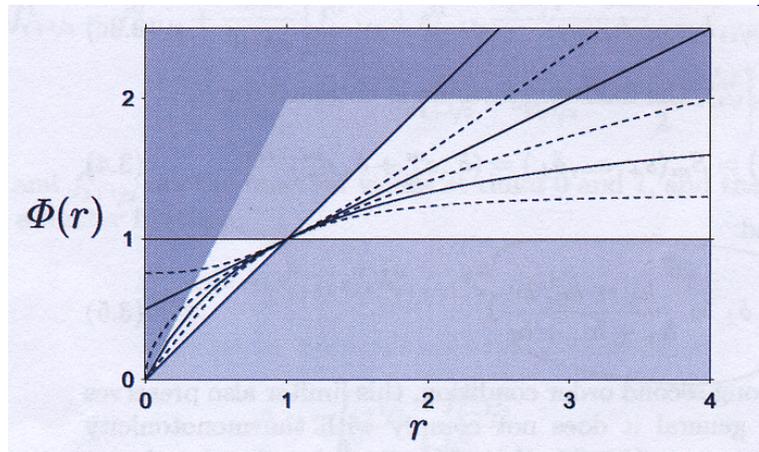
Des tentatives de généralisations (BR, Llor) :

$$\Phi_{\zeta}(r) = \max \left(0, \min \left[2, \left(\frac{1+r^{\zeta}}{2} \right)^{-\frac{1}{\zeta}}, 2r \right] \right), \forall \zeta \in \mathbb{R}$$

$$\Phi_{\psi}(r) = \max \left(0, \min \left[2, \frac{r^{\psi}(1+r^{\psi})}{(1+r)^{\psi}}, 2r \right] \right), \dots \text{ entre autres.}$$



Travaux CEA



/

Figure 1: Limiteurs monotones.

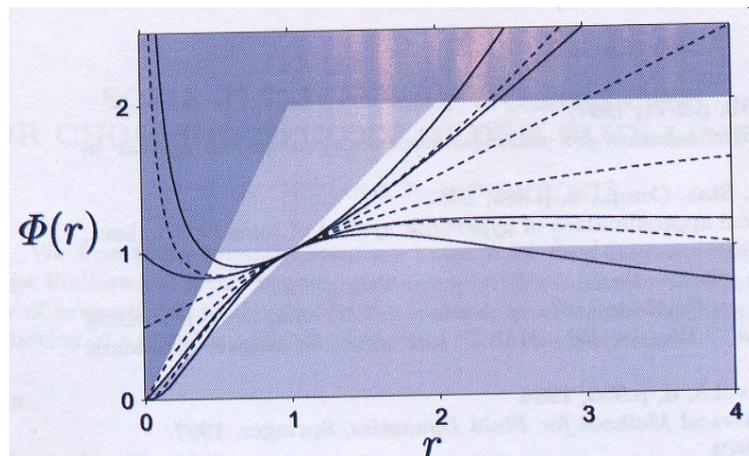


Figure 2: + limiteurs non monotones (A.Llor).

Dans tous les cas la représentation affine sur toute la maille est utilisée.



Représentations multi-pentes

A partir de la représentation parabolique du schéma PPM, Bertrand Meltz a proposé une représentation continue mais avec rupture de pente ("bi-affine") où un nouveau degré de liberté a été introduit.

Le principe en est le suivant :

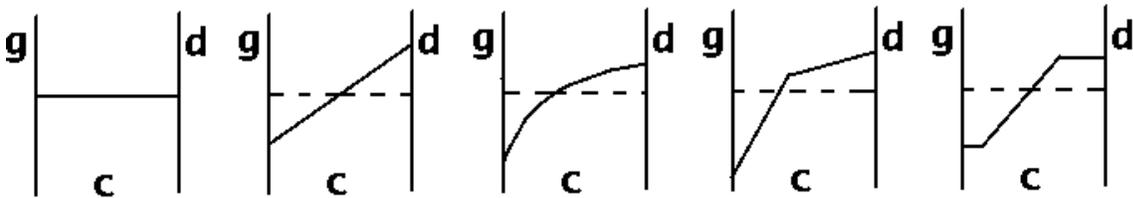
1. Définition de deux valeurs de la quantité q aux faces des mailles à l'aide d'une interpolation d'ordre 3 ("à la PPM").
2. Définition d'un point intermédiaire intersection de deux segments de droite issus des valeurs aux faces à l'intérieur de la maille et t.q. :
 - conservation,
 - non dépassement des valeurs dans les mailles voisines.

Une formulation présentant moins d'arbitraire fut proposée (BR) définissant la pente intérieure à la maille comme combinaison linéaire des deux pentes centrées aux sommets gauche et droit de la maille.

Pratiquement, aucune des méthodes dans les pages ci-dessus décrites n'est à même de conjurer les effets de sur-compressibilité ou ceux de diffusion numérique tout comme de rendre compatible ordre de précision élevé et robustesse du calcul.



Multipente



Diverses représentations esquissées de gauche à droite :
 constante par maille (donor-cell), affine (MUSCL),
 parabolique (PPM), bipente, multiple.



Sous-maille

Définir dans une maille une représentation des variables d'échelle spatiale inférieure à celle de la maille.

Moyen : trier et combiner toutes informations résidant à l'extérieur de la maille pour *inventer* des données supplémentaires cohérentes avec le problème à résoudre (a minima : préserver conservation et principe du maximum).

Or les données utilisées étaient contigües, alignées dans une direction.

On va ci-dessous introduire des données supplémentaires issues de considérations multidimensionnelles : vecteur gradient de direction normale à un front dont on calculera la propagation.

Nota bene : on se contente "d'aller voir" et d'illustrer ce concept au moyen d'outils numériques pré-existants de suivi d'interface. Il n'est pas question non plus d'assurer une efficacité pratique mais d'évaluer l'intérêt de cette représentation.



Tautologeons, un peu

Plaçons nous dans \mathbb{R}^n , $n = 1, 2, 3$ et considérons la nappe (profil) d'une quantité scalaire q dans la direction \mathbf{x} de \mathbb{R}^n au cours du temps t . Le domaine spatial de calcul $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^n$ est découpé en maille carrées Ω_c de numéro c , de dimension $\Delta \mathbf{x}_c$. Dans la maille Ω_c la quantité q a une valeur constante q_c associée à une discrétisation différences-finies ou volumes-finis.

Soit $q(t, \mathbf{x})$ une quantité physique scalaire obéissant à une équation d'évolution sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ du type :

$$\partial_t q + \mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} q + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, q) + R(t, \mathbf{x}, q) = S(t, \mathbf{x})$$

associée à des conditions initiales et aux limites compatibles et où \mathbf{u} est le champ de vitesse, \mathbf{F} un flux, R une production locale, S une source.

Un algorithme "lagrange-projection" résout le système de deux équations :

$$\partial_t q + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, q) + R(t, \mathbf{x}, q) = S(t, \mathbf{x})$$

$$\partial_t q + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} q = 0$$

où $\nabla_{\mathbf{x}}$ et $\nabla_{\mathbf{x}} \cdot$ sont respectivement les opérateurs gradient et divergence dans \mathbb{R}^n . La seconde équation, équivalente à $\frac{dq}{dt} = 0$, est l'équation d'advection.



... beaucoup

La nappe selon $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ de la quantité $q \in \mathbb{R}$ décrit au cours du temps une surface $\Gamma(t, \mathbf{x}, q) \equiv 0$, c'est-à-dire $d\Gamma(t, \mathbf{x}, q) = 0$ et :

$$(2) \quad \partial_t \Gamma dt + \nabla_{\mathbf{x}} \Gamma d\mathbf{x} + \partial_q \Gamma dq = 0$$

Divisant par dt et regroupant les termes en \mathbf{F} , R et S en $\mathcal{S}(t, \mathbf{x}, q)$:

$$(3) \quad \partial_t q = \mathcal{S}(t, \mathbf{x}, q)$$

$$(4) \quad \partial_t \Gamma + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\mathbf{x}} \Gamma + \mathcal{S}(t, \mathbf{x}, q) \partial_q \Gamma = 0$$

Cette tautologie traduit qu'il est équivalent d'advecter une quantité q dans la direction \mathbf{x} ou bien sa nappe considérée comme une frontière dans le plan (\mathbf{x}, q) pour chaque instant t .

La surface Γ sépare l'espace (\mathbf{x}, q) en deux zones dites intérieure et extérieure et marque une discontinuité dans la partition de \mathbb{R}^n dont la dynamique peut être traitée par des algorithmes de suivi de front.

On a donc à présent un problème d'advection dans \mathbb{R}^{n+1} sachant que le problème à résoudre a quant à lui pour dimension environ $3 \times N_x \times N_y \times N_z^n$.



Boîte à outils

- Vu :

1. problème de transport d'une frontière,
2. dans un espace discrétisé $\subset \mathbb{R}^{n+1}$.

On a donc à suivre une interface et par commodité on a utilisé la technique de Youngs dont nous possédons les algos.

On va comparer les résultats de ce suivi avec la méthode upwind basée sur les directions alternées.

- Boîte à outils =

1. algo Youngs 2D made in LANL (an old stuff),
2. algo 2D d'advection,
3. algo 3D de suivi d'interface ← merci Jacques Flament.



Organigrammes

On décrit les algorithmes pour un domaine physique $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$.

- Initialisation

On connaît la distribution spatiale $q(0, \mathbf{x})$. On se donne une discrétisation Δq . Pour le cas Multipente, on en déduit le taux f_c de la quantité q dans chaque maille $\{\Delta \mathbf{x}, \Delta q\}$.



Organigrammes

- Propagation

- ◇ Limiteurs. On procède par direction alternées-chaloupées ($xy - yx$).

- ◇ Multipente bidimensionnel. On procède par direction alternées-chaloupées ($xy - yx$). A chaque passe monodimensionnelle ζ de résolution de l'équation d'advection, On considère le plan (ζ, q) sur lequel on propage la courbe Γ .

- ◇ Multipente multidimensionnel.

- On procède par intégration multidimensionnelle directe - sans splitting. A chaque cycle de calcul, on résout l'équation d'advection dans l'espace (x, y, q) avec deux étapes :

1. le calcul du plan représentant l'interface dans chacune des "mailles mixtes",
2. puis le calcul du volume passé en dessous du plan au travers des faces de ces mailles.

Des méthodes itératives sont employées dans les deux cas.



Organigrammes

- Mise à jour
 - *Limiteurs* : mise à jour de la quantité q à chaque passe.
 - *Multipente* : pour x et y fixés, calcul de q par sommation des fractions de présence sur chaque ligne de la direction q de l'espace (x, y, q) .

- Signalons que le respect du principe du maximum ne fait pas l'objet d'un traitement particulier avec Multipente.