

# L'analyse temps-fréquence et la détection des ondes gravitationnelles

Yves Meyer

## 1 Les ondes gravitationnelles

Tous les deux mois environ, une **alerte** nous est envoyée. Elle vient du fond de l'Univers et nous annonce qu'un événement gravitationnel cataclysmique s'y est produit.

Mais, jusqu'en septembre 2015, les scientifiques ne pouvaient pas **détecter** ces signaux. Tout changea le 14 septembre 2015 à 09 :50 :45 (UTC time) : pour la première fois l'homme a détecté le passage d'une onde gravitationnelle et en a compris le message : **deux trous noirs avaient fusionné**. Cette détection n'a été annoncée que le 11 février 2016, car les scientifiques voulaient être rigoureusement sûrs de leur analyse des données. Une nouvelle astrophysique est née et notre connaissance de l'Univers en sera à jamais modifiée.

*This first detection is a spectacular discovery : the gravitational waves were produced during the final fraction of a second of the merger of two black holes to produce a single, more massive spinning black hole. This collision of two black holes had been predicted but never observed.*

(Annonce du laboratoire LIGO de Caltech).

**Nous entendons l'Univers.**

Et nous entendons l'Univers grâce à des **algorithmes** qui ressemblent à ceux que l'on emploie depuis la fin des années 80 dans le son numérique **Dolby** (que l'on trouve dans tous les films récents).

Une onde gravitationnelle est une **vibration** de l'espace-temps, une modification **transitoire** de la géométrie de l'Univers. Ces déformations de la géométrie de l'espace temps, de la forme géométrique de l'Univers, se propagent dans l'Univers, à la vitesse de la lumière, sous la forme d'une vibration dont la durée ne dépasse pas quelques secondes.

Une onde gravitationnelle est déclenchée par un événement gravitationnel cataclysmique. Une **fusion entre deux trous noirs** s'est produite il y a un milliard trois cents millions d'années. Pendant quelques secondes l'énergie dissipée par cette fusion fut plus grande que toute l'énergie produite dans le reste de l'Univers. Cette fusion a déclenché l'onde gravitationnelle qui, après avoir traversé une grande partie de l'Univers, a atteint la terre le 14 septembre 2015 à 09 :50 :45 (temps UTC).

Einstein pensait que les ondes gravitationnelles sont trop ténues pour pouvoir être détectées. Par ailleurs Einstein ne croyait pas en l'existence des trous noirs.

La détection, le 14 septembre 2015, d'une onde gravitationnelle constitue la première **preuve directe de l'existence des trous noirs**.

En fait ce n'est pas l'homme qui a perçu cette vibration, c'est un **algorithme** mis au point par **Sergey Klimenko** (University of Florida). Les nouveaux algorithmes qui ont permis la détection des ondes gravitationnelles font partie de l'**analyse temps-fréquence**. L'algorithme de Klimenko n'utilise pas de connaissance a priori sur le signal recherché et permet donc la détection de toute une gamme de *gravitational-wave bursts* provenant d'événements cataclysmiques dans l'Univers.

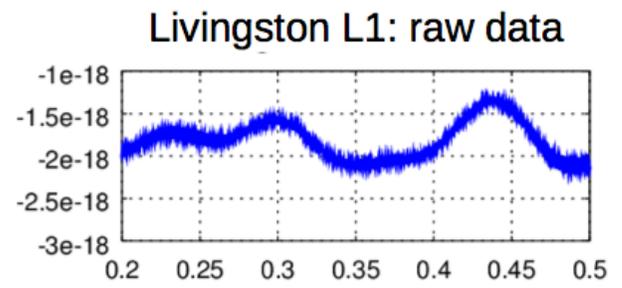
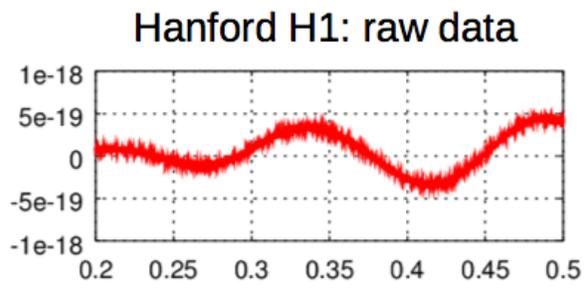


Sergey Klimenko

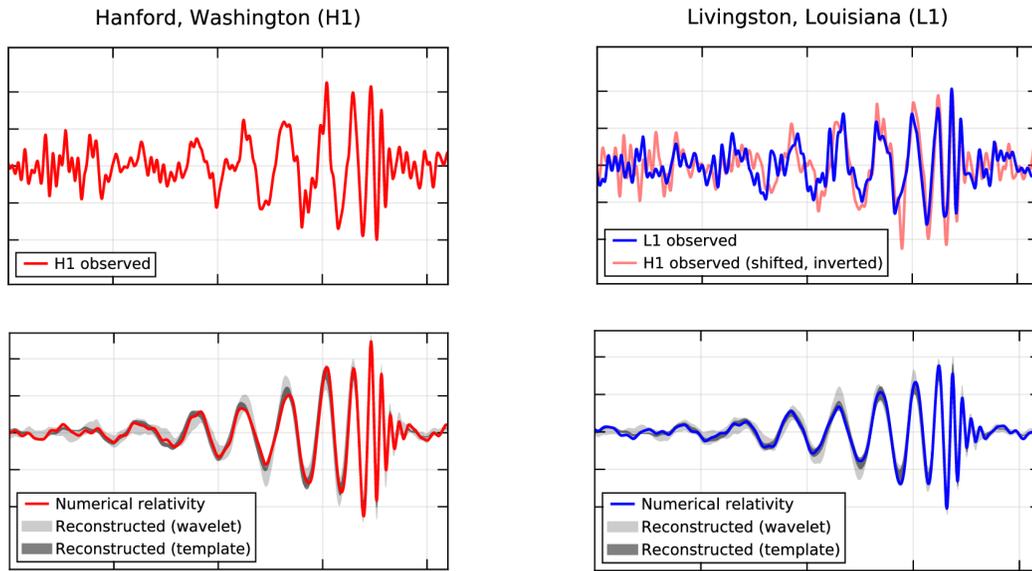
## 2 Livingstone et Hanford

La National Science Foundation avait construit à la fin des années 90 deux observatoires géants séparés de 3.002 Kms. L'un (Hanford) est situé près de Seattle (Etat de Washington), l'autre (Livingston) est situé en Louisiane. Ces observatoires ont fonctionné pendant 8 ans sans détecter la moindre onde gravitationnelle. Cela a conduit la NSF à remplacer les détecteurs par une version dont la sensibilité est très améliorée (Advanced LIGO, 2015).

Le 14 septembre 2015, un signal, présentant toutes les caractéristiques d'une onde gravitationnelle, a été détecté à Hanford. Le même signal a été détecté presque simultanément à Livingston. L'infime décalage temporel (7 millisecondes) séparant ces deux détections correspond au temps mis par l'onde gravitationnelle pour aller de Hanford à Livingston à la vitesse de la lumière.



*Signaux enregistrés par les deux détecteurs de Ligo durant le passage du chirp*



Onde gravitationnelle GW150914 enregistrée par les détecteurs LIGO de Hanford (H1, colonne de gauche) et de Livingston (L1, colonne de droite) le 14 septembre 2015 à 09 :50 :45 UTC. Les fréquences des séries temporelles sont filtrées pour ne conserver que la bande de fréquences la plus sensible du détecteur, et pour éliminer certaines “lignes spectrales” dues aux instruments de mesure.

### 3 L'analyse temps-fréquence

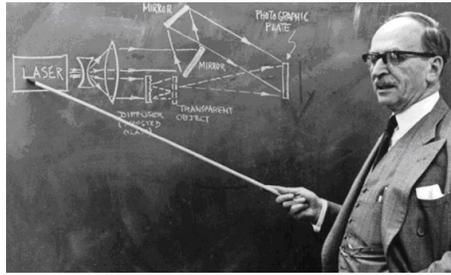
Ecrire la partition en écoutant la musique (dictée musicale), puis analyser et interpréter la partition, c'est effectuer une analyse temps-fréquence du signal acoustique perçu. C'est une partie de ce qu'il fallait faire pour détecter les ondes gravitationnelles et en comprendre le message.

L'analyse temps-fréquence est une amélioration de l'**analyse de Fourier**. L'analyse de Fourier a été créée pour analyser les fonctions (ou signaux) périodiques (et, plus généralement, presque-périodiques). Elle est l'instrument idéal pour analyser les signaux stationnaires (dont les propriétés statistiques ne changent pas au cours du temps).

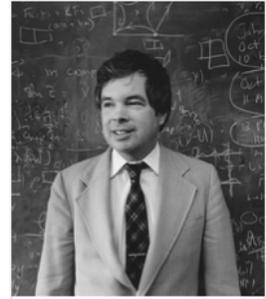
L'analyse temps-fréquence est adaptée à une classe importante de **signaux transitoires**, à savoir les signaux *quasi-stationnaires*, les signaux modulés en fréquence ou les *chirps*. L'analyse temps-fréquence a été créée par Eugène Wigner (en 1932), puis développée par Dennis Gabor (en 1946) et Kenneth Wilson (en 1987), trois prix Nobel de physique.



Eugène Wigner



Dennis Gabor



Kenneth Wilson

Il faut aussi mentionner le mathématicien Jean Ville qui a adapté les idées de Wigner à l'analyse temps-fréquence des signaux acoustiques.

En “mathématiques pures” l’analyse temps-fréquence s’apparente à l’**analyse micro-locale** qui joue un rôle important dans l’étude de la régularité des solutions des équations aux dérivées partielles.

Les motivations de Wigner, Gabor et Wilson n’étaient pas la détection des ondes gravitationnelles, mais (1) la mécanique quantique, (2) l’analyse du signal de parole et (3) la théorie de la renormalisation.

Les idées de Gabor ont été amendées par Francis Low et Roger Balian (théorème de Low-Balian), puis reprises et améliorées par Henrique Malvar et par Martin Vetterli. Malvar et Vetterli ont élaboré la *Modified discrete cosine transform* utilisée dans le **son numérique Dolby**. Les algorithmes proposés par Wilson ont été précisés et validés par **Stéphane Jaffard** et ses collaborateurs (I. Daubechies et J-L. Journé). Ces travaux de Jaffard ont été utilisés par Klimenko et ont contribué à la détection des ondes gravitationnelles. Ecrire la partition en écoutant la musique, puis analyser et interpréter la partition, voilà, en un sens, ce que fait Klimenko pour détecter les ondes gravitationnelles.

Ce qui distingue l’algorithme de Klimenko d’une analyse temps-fréquence traditionnelle est l’introduction d’un paramètre d’échelle, un **zoom** que l’on doit effectuer sur le signal enregistré et convenablement filtré  $s(t)$  pour percevoir enfin l’onde gravitationnelle  $\sigma(t)$ . La gamme d’échelles utilisée par Klimenko va de 1 à  $10^4$  correspondant à des durées d’événements transitoires allant d’une milli-seconde à dix secondes.

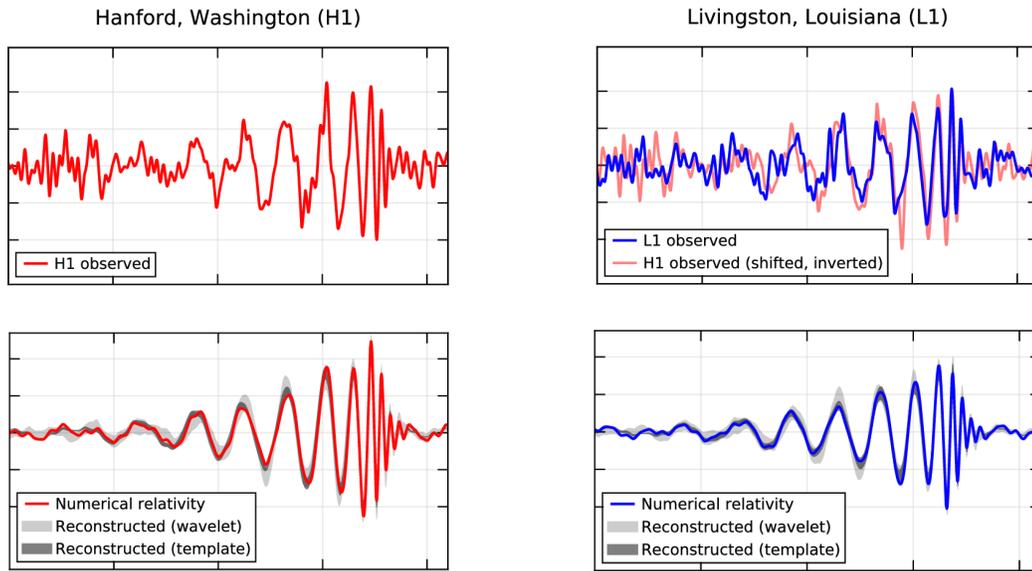
## 4 The hunting of the chirp

La déformation des longueurs n'est perceptible qu'au moment précis où l'onde gravitationnelle rencontre le détecteur. L'espace-temps se déforme alors pendant quelques secondes. La déformation des longueurs ne dépasse pas le dix-millième du diamètre du proton. **Cette déformation est une fonction  $\sigma(t)$  du temps.** Le signal observé  $s(t) = \sigma(t) + r(t)$  n'est pas cette déformation. Il est corrompu par un bruit  $r(t)$  (bruit mécanique dont les propriétés statistiques sont connues, bruit thermique et *glitches*). Ce bruit  $r(t)$  est **mille fois** plus grand que le signal recherché  $\sigma(t)$ . Klimenko devait donc détecter un événement qui a toutes les chances de passer totalement inaperçu.

Par des calculs théoriques basés sur les travaux d'Einstein, Thibault Damour avait établi la forme analytique que devrait avoir une onde gravitationnelle produite par l'effondrement l'une sur l'autre de deux étoiles à neutrons en rotation rapide. C'est une fonction du temps définie par

$$(1) \quad s(t) = c|t - t_0|^{-\alpha} \cos(\omega|t - t_0|^\beta + \varphi)$$

où  $c$  est une constante,  $\alpha = 1/4$ ,  $\beta = 5/8$ ,  $\omega \gg 1$  et  $t_0$  est l'instant de la coalescence des deux étoiles à neutrons. Ce signal  $s(t)$  est un exemple de signaux modulés en fréquence, un *chirp*.



Onde gravitationnelle GW150914 enregistrée par les détecteurs LIGO de Hanford (H1, colonne de gauche) et de Livingston (L1, colonne de droite) le 14 septembre 2015 à 09 :50 :45 UTC. Les fréquences des séries temporelles sont filtrées pour ne conserver que la bande de fréquences la plus sensible du détecteur, et pour éliminer certaines “lignes spectrales” dues aux instruments de mesure.

Le mot anglais *chirp* signifie le chant modulé d'un oiseau. En traitement du signal il s'agit d'un signal modulé en fréquence.

On peut définir un chirp  $s(t)$  par la condition que le signal analytique correspondant  $S(t)$  soit de la forme

$$(4) \quad S(t) = A(t) \exp(i\varphi(t))$$

où  $A(t)$  et  $\varphi(t)$  ont des structures très différentes. D'une part  $A(t)$  doit être une fonction régulière ayant des variations lentes tandis que  $\varphi$  a des variations très rapides. Plus précisément on demande que

$$(5) \quad \frac{|\varphi'(t)|^2}{|\varphi''(t)|} \gg 1$$

$$(6) \quad \left| \frac{A(t)\varphi'(t)}{A'(t)} \right| \gg 1$$

Alors la "fréquence instantanée" de  $s(t)$  est définie par

$$(7) \quad \omega = \varphi'(t)$$

et la longueur d'onde instantanée est

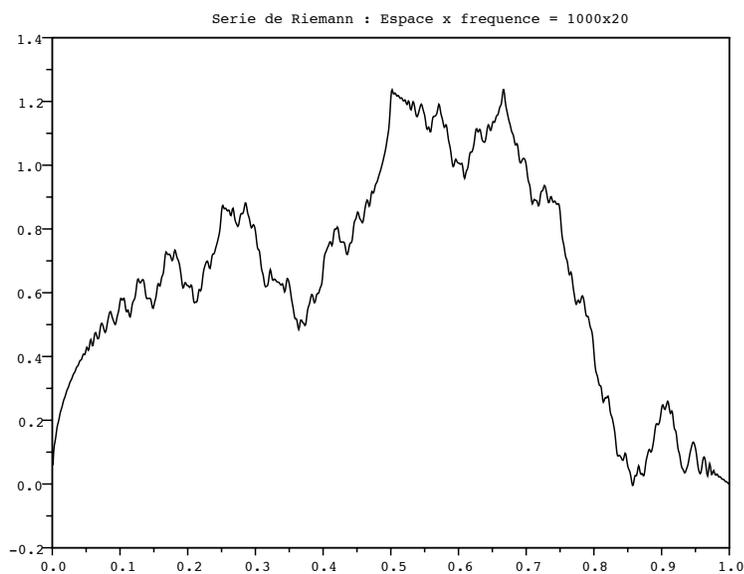
$$(8) \quad \lambda(t) = \frac{2\pi}{\varphi'(t)}$$

La condition (5) s'écrit  $|d\lambda/dt| \ll 1$ .

Les chirps existent dans la Nature. Ils sont utilisés par les animaux pour s'orienter ou communiquer. Les oiseaux, les grenouilles et les baleines émettent des chirps. Une espèce particulière de chauve-souris (*Eptesicus fuscus*) utilise un sonar basé sur l'émission de chirps.

Les chirps ne peuvent être détectés par l'analyse de Fourier. Un contre-exemple mathématique est donné par la série de Riemann

$$(2) \quad \sigma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} \sin(n^2 x)$$

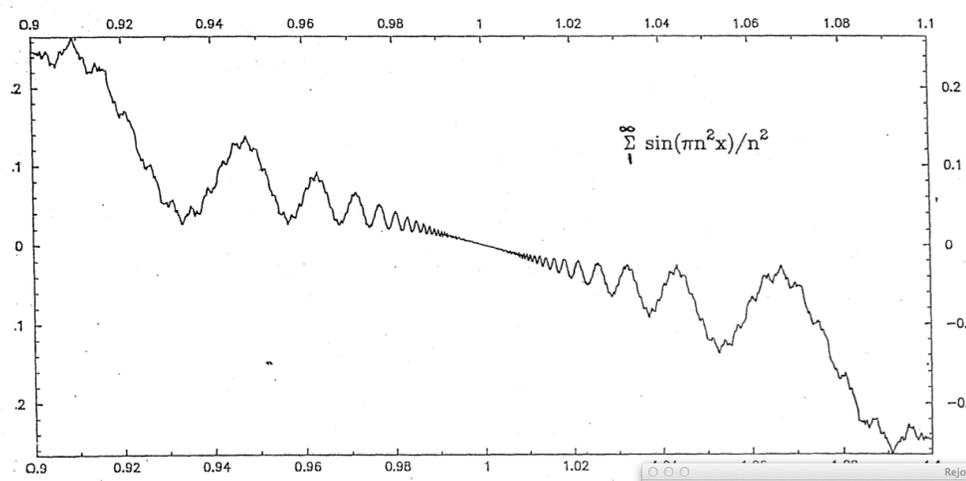


Cette fonction a été proposée par Riemann dans une réunion à l'Académie des Sciences de Berlin (1861) comme exemple de fonction continue partout non dérivable. En 1916, G. Hardy démontra que  $\sigma(x)$  n'est pas dérivable en  $x_0$  si  $x_0 \neq \pi \frac{2p+1}{2q+1}$  mais personne n'avait pu établir la conjecture faite par Riemann. Mais, en 1971, Joseph Gerver, un élève de première année de premier cycle de Serge Lang, résolut le problème posé par Riemann en démontrant que  $\sigma(x)$  est dérivable en tous ces points  $x_0$ .

Une analyse plus poussée autour de  $x_0 = \pi$  montre que  $\sigma(x)$  admet un développement limité en  $\pi$  de la forme

$$(3) \quad \sigma(x + \pi) = -x/2 + \omega(x) + \rho(x)$$

où  $\omega(x)$  est un chirp dont la structure est semblable à celle des ondes gravitationnelles : on a  $\omega(x) = |x|^{3/2}w(1/x)$  où  $w(x)$  est périodique de période  $4\pi$ , régulière et d'intégrale nulle. Le terme d'erreur  $\rho(x) = O(|x|^{5/2})$  est un infiniment petit d'ordre supérieur quand  $x \rightarrow 0$ .



Que cela nous dit-il? Cela nous apprend que les chirps ne peuvent être détectés par l’analyse de Fourier standard. On ne voit rien en lisant et relisant la série de Fourier (2). La détection des chirps à l’intérieur de la série de Riemann et la détection des ondes gravitationnelles sont des problèmes difficiles, car ils nécessitent de coupler l’analyse temps-fréquence à l’analyse temps-échelle en utilisant un zoom adapté.

## **5 Les algorithmes utilisés dans l’analyse temps-fréquence**

Le déploiement d’un signal dans le plan temps-fréquence est un outil d’analyse créé par le mathématicien français Jean Ville (1910-1989) à l’aide d’idées introduites par Eugene Wigner (1902-1995) en mécanique quantique. C’est pourquoi on parle de la transformation de Wigner-Ville. Le plan temps-fréquence en mécanique quantique est la traduction quantique de l’espace des phases en mécanique classique. Un point de l’espace des phases est  $(x, v)$  où  $x$  désigne la position et  $v$  est la vitesse. En mécanique quantique  $v$  est remplacée par la fréquence  $\omega$ . Le plan “temps-fréquence” est  $\mathcal{P} = \mathbb{R}^2$ .

Une boîte de Heisenberg  $B \subset \mathcal{P}$  est définie par  $B = I \times J$  où  $I$  et  $J$  sont des intervalles tels que  $|I||J| = 2\pi$ . En fait  $J = J_+ \cup J_-$  est la réunion de deux intervalles symétriques par rapport à 0.

**Definition 5.1** *Déployer un signal  $s(t)$  dans le plan temps-fréquence consiste à trouver une “décomposition efficace”*

$$(9) \quad s = \sum_{\alpha \in A} s_\alpha$$

où

- (a) *chaque  $s_\alpha$  est “localisée” dans la boîte de Heisenberg correspondante  $B_\alpha = I_\alpha \times J_\alpha$*
- (b) *les  $B_\alpha, \alpha \in A$ , sont deux à deux disjointes*

Une décomposition efficace est définie par la condition que les énergies des différents termes  $s_\alpha$  soient le plus contrastées possible (la référence est le *matching pursuit* ou le conditionnement en analyse numérique). On cherche donc la représentation la plus simple et la plus concise possible : on veut, pour tout entier  $N$ , minimiser l’erreur commise  $\epsilon_N$  en utilisant seulement  $N$  termes dans (9). La condition (a) signifie que le support de  $s_\alpha$  est “essentiellement” contenu dans  $I_\alpha$  et que le support de la transformée de Fourier de  $s_\alpha$  est “essentiellement” contenu dans  $J_\alpha$ . Ce type de décompositions a souvent été utilisé par Ronald Coifman, Charles Fefferman et Christoph Thiele.

## 6 Les ondelettes temps-fréquence

La décomposition dans une base orthonormée d'ondelettes temps-fréquence est souvent la méthode la plus simple pour effectuer une analyse temps-fréquence. Nous donnons ici une version de ces ondelettes temps-fréquences un peu différente de celles utilisées par Klimenko. La construction débute par une partition arbitraire de la droite réelle en intervalles adjacents  $I_j = [a_j, a_{j+1}]$ , où  $\dots < a_j < a_{j+1} < \dots$ , et  $\lim_{j \rightarrow +\infty} a_j = +\infty$ ,  $\lim_{j \rightarrow -\infty} a_j = -\infty$ . Soit  $l_j = a_{j+1} - a_j$  et soit  $\alpha_j$  des nombres réels positifs assez petits pour que  $l_j \geq \alpha_j + \alpha_{j+1}$  for all  $j \in \mathbb{Z}$ .

Les boîtes de Heisenberg  $B_{(j,k)}$ ,  $j, k \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$ , sont alors  $B_{(j,k)} = I_j \times J_k$  où

$$J_k = [-\pi(k+1)/l_j, -\pi k/l_j] \cup [\pi k/l_j, \pi(k+1)/l_j], \quad k \in \mathbb{N}.$$

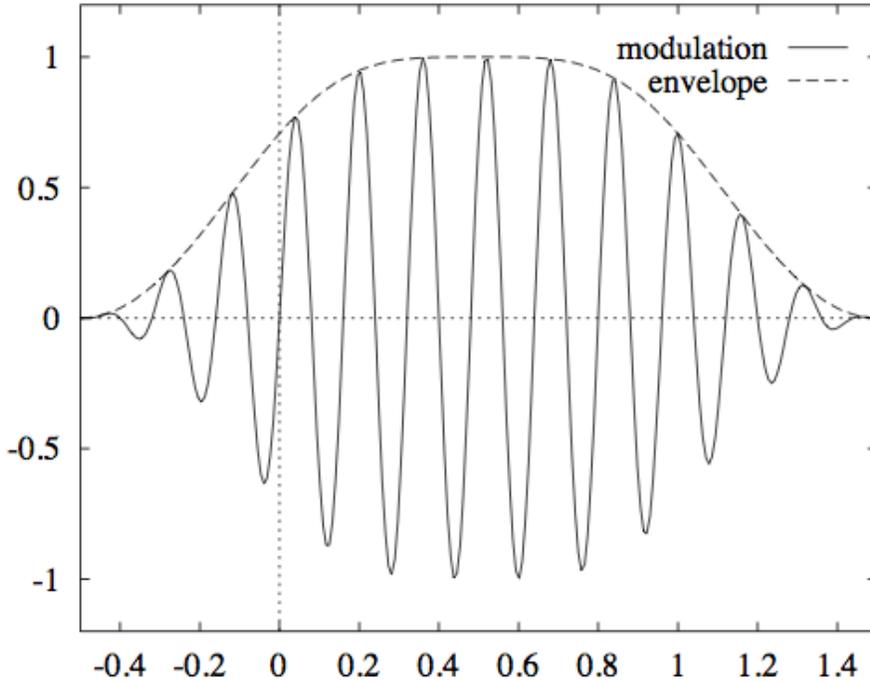
Les fenêtres de segmentation  $w_j(t)$  que nous allons utiliser sont essentiellement les fonctions indicatrices des intervalles  $[a_j, a_{j+1}]$ . Plus précisément on demande que :

- a)  $0 \leq w_j(t) \leq 1$  for all  $t \in \mathbb{R}$
- b)  $w_j(t)$  est nulle sur  $[a_j - \alpha_j, a_{j+1} + \alpha_{j+1}]$
- c)  $w_{j-1}(a_j - \tau) = w_j(a_j + \tau)$  si  $|\tau| \leq \alpha_j$
- d)  $w_{j-1}^2(a_j + \tau) + w_j^2(a_j + \tau) = 1$  if  $|\tau| \leq \alpha_j$ .

Les ondelettes de Malvar-Wilson sont

$$(10) \quad w_{j,k}(t) = \sqrt{\frac{2}{l_j}} w_j(t) \cos \left[ \frac{\pi}{l_j} \left( k + \frac{1}{2} \right) (t - a_j) \right]$$

où  $j \in \mathbb{Z}$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .



Alors on a

**Theorem 6.1** *Les ondelettes de Malvar-Wilson forment une base orthonormée de  $L^2(\mathbb{R})$ .*

Les ondelettes de Malvar-Wilson imitent les notes d'une partition musicale. L'attaque de la note est modélisée par la fonction  $w_j$  sur l'intervalle  $[a_j - \alpha_j, a_j + \alpha_j]$ , l'atténuation se fait sur  $[a_{j+1} - \alpha_{j+1}, a_{j+1} + \alpha_{j+1}]$  et la fréquence est environ  $\frac{k+1/2}{2l_j}$ .

J'avais envisagé d'analyser le signal contenant une éventuelle onde gravitationnelle en optimisant (par un algorithme adaptatif) le choix des intervalles  $I_j$  de sorte que la représentation du signal observé soit la plus simple et la plus concise. Pour des raisons de rapidité de calcul, Klimenko ne suit pas cette méthode mais utilise une batterie de partitions emboîtées (cela opère donc les zooms nécessités par notre ignorance de la durée de l'onde gravitationnelle). En outre, ce ne sont pas exactement les ondelettes du théorème 6.1 qui sont utilisées par Klimenko, mais bien la version élaborée par Stéphane Jaffard et ses collaborateurs.

## 7 Dernières nouvelles

The two LIGO gravitational wave detectors in Hanford Washington and Livingston Louisiana have caught a second robust signal from two black holes in their final orbits and then their coalescence into a single black hole. This event, dubbed GW151226, was seen on December 26th at 03 :38 :53 (in Universal Coordinated Time, also known as Greenwich Mean Time), near the end of LIGO's first observing period (Boxing Day event).

Like LIGO's first detection, this event was identified within minutes of the gravitational wave's passing. Subsequent careful studies of the instruments and environments around the observatories showed that the signal seen in the two detectors was truly from distant black holes - some 1.4 billion light years away, coincidentally at about the same distance as the first signal ever

detected. The Boxing Day event differed from the LIGO's first gravitational wave observation in some important ways, however.

The gravitational wave arrived at the two detectors at almost the same time, indicating that the source was located somewhere in a ring of sky about midway between the two detectors. Knowing our detector sensitivity pattern, we can add that it was a bit more likely overhead or underfoot instead of to the West or the East. With only two detectors, however, we can't narrow it down much more than that. This differs from LIGO's first detected signal (GW150914, from 14 September 2015), which came from the 'southeast', hitting Louisiana's detector before Washington's.

The two merging black holes in the Boxing Day event were less massive (14 and 8 times the mass of our sun) than those observed in the first detection GW150914 (36 and 29 times the mass of our sun). While this made the signal weaker than GW150914, when these lighter black holes merged, their signal shifted into higher frequencies bringing it into LIGO's sensitive band earlier in the merger than we observed in the September event. This allowed us to observe more orbits than the first detection—some 27 orbits over about one second (this compares with just two tenths of a second of observation in the first detection). Combined, these two factors (smaller masses and more observed orbits) were the keys to enabling LIGO to detect a weaker signal. They also allowed us to make more precise comparisons with General Relativity. Spoiler : the signal agrees, again, perfectly with Einstein's theory. Last but not least, the

Boxing Day event revealed that one of the initial black holes was spinning like a top! - and this is a first for LIGO to be able to state this with confidence. A spinning black hole suggests that this object has a different history – e.g. maybe it ‘sucked in’ mass from a companion star before or after collapsing from a star to form a black hole, getting spun-up in the process.

With these two confirmed detections, along with a third likely detection made in October 2015 (believed also to be caused by a pair of merging black holes—see our paper draft on Black Hole Binaries in O1 for more information) we can now start to estimate the rate of black hole coalescences in the Universe based not on theory, but on real observations. Of course with just a few signals, our estimate has big uncertainties, but our best right now is somewhere between 9 and 240 binary black hole coalescences per cubic Gigaparsec per year, or about one every 10 years in a volume a trillion times the volume of the Milky Way galaxy! Happily, in its first few months of operation, LIGO’s advanced detectors were sensitive enough to probe deeply enough into space to see about one event every two months.

Our next observing interval, Observing Run #2, or “O2” will start in the Fall of 2016. With improved sensitivity, we expect to see more black hole coalescences, and possibly detect gravitational waves from other sources, like binary neutron-star mergers. We are also looking forward to the Virgo detector joining us later in the O2 run. Virgo will be enormously helpful in locating sources on the sky, collapsing that ring down to a patch, but also helping us understand the sources of gravitational waves.

LIGO releases its data to the public. This open-data policy allows others to analyze our data, thus ensuring that the LIGO and Virgo collaborations did not miss anything in their analyses, and in the hopes that others will find even more interesting events. Our data are shared at the LIGO Open Science Center. GW151226 has its own page there.

We encourage you to wander around the LIGO Laboratory web page where you will find graphics to help you understand the Boxing Day observation, links to the press release, and pointers to scientific papers if you would like to dig in even deeper. There you will also find links to the LIGO Scientific Collaboration website, and to our sister collaboration, Virgo, both of which are central to these scientific results.

## **8 Références**

Ouvrir Google. Ensuite entrez simplement : LIGO. Ou bien, entrez : Sergey Klimenko. Bonne lectures !