Les Ondelettes:

Recontre Maths Pures et Applications

Prix Abel d'Yves Meyer

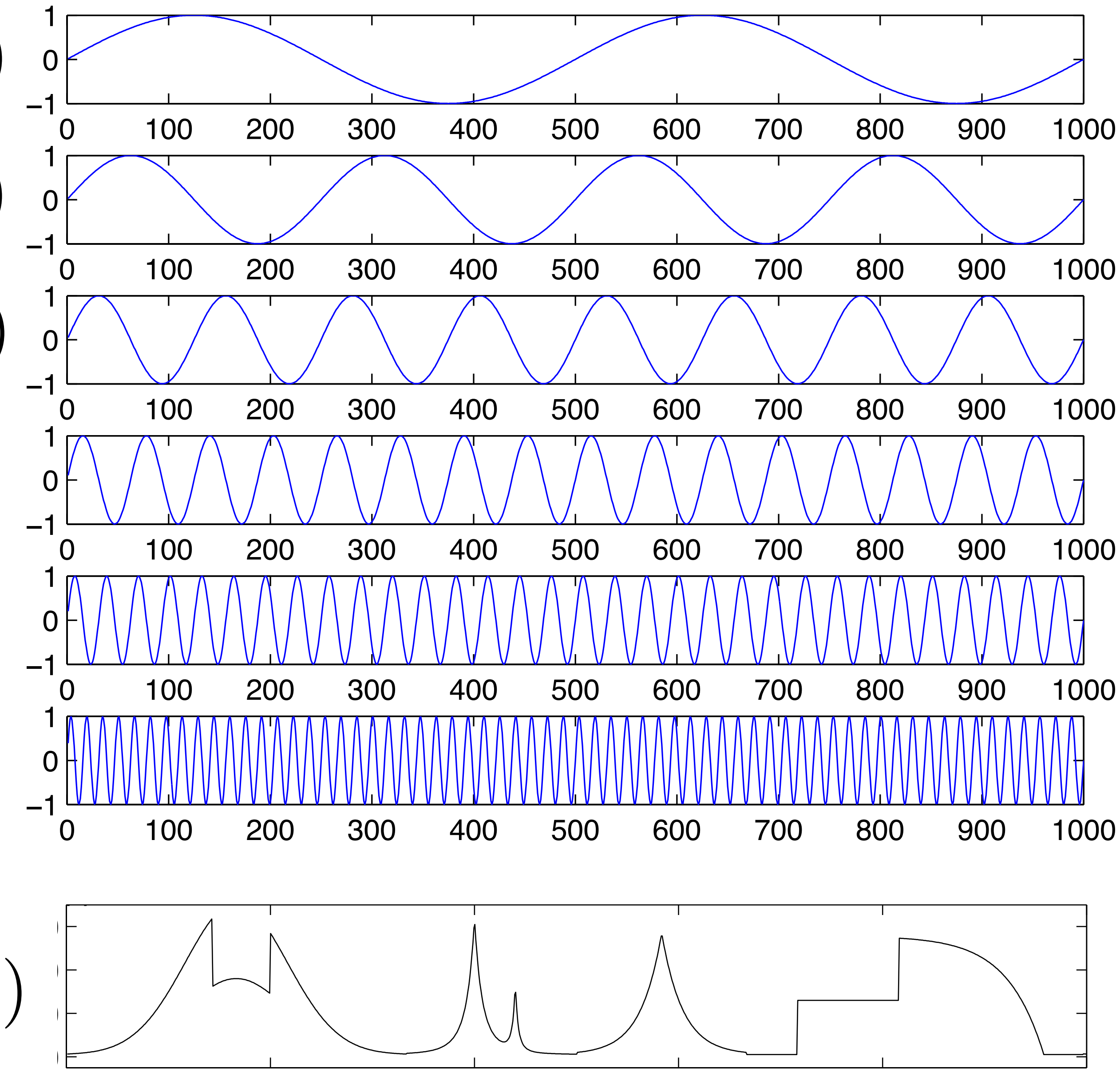
Stéphane Mallat
École Normale Supérieure

Base de Fourier: 1810

$e_1(t)$

$e_2(t)$

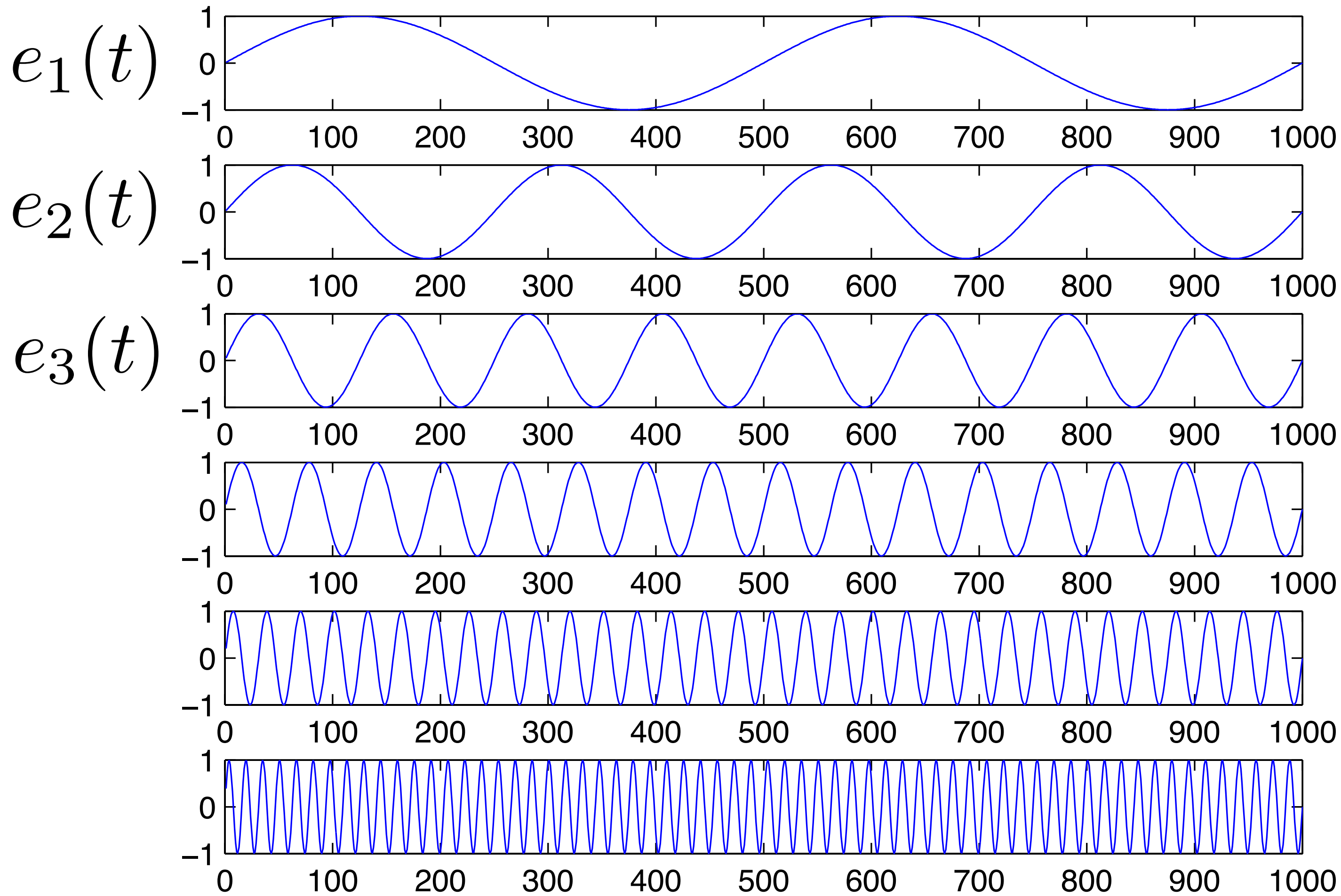
$e_3(t)$

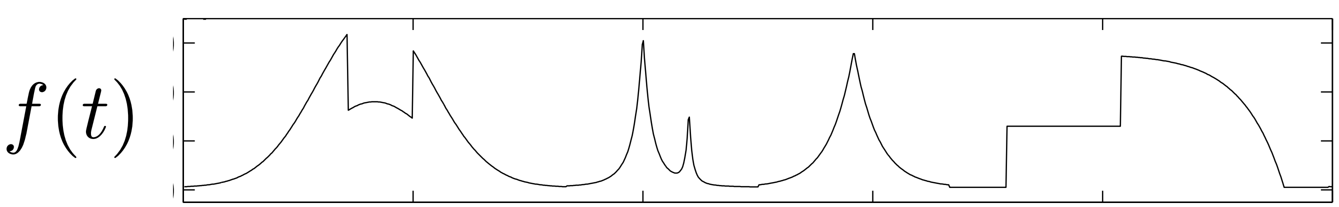


$f(t)$

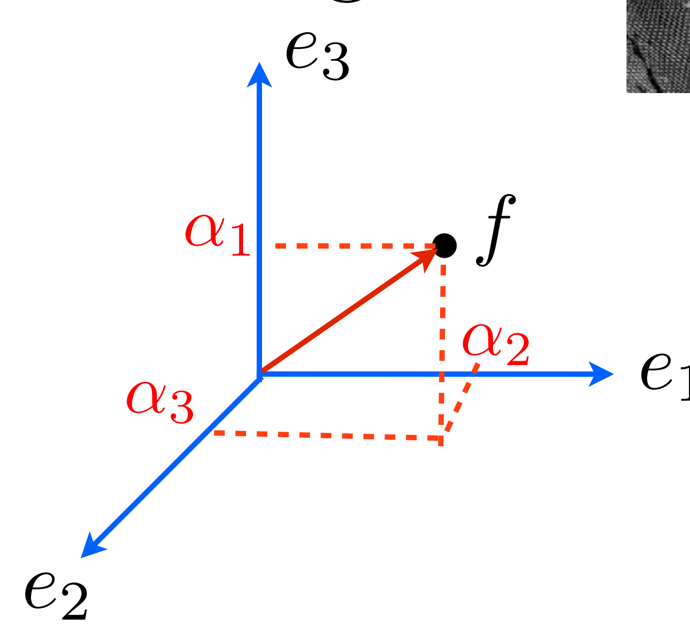
$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \, e_k(t)$$

Base de Fourier: 1810





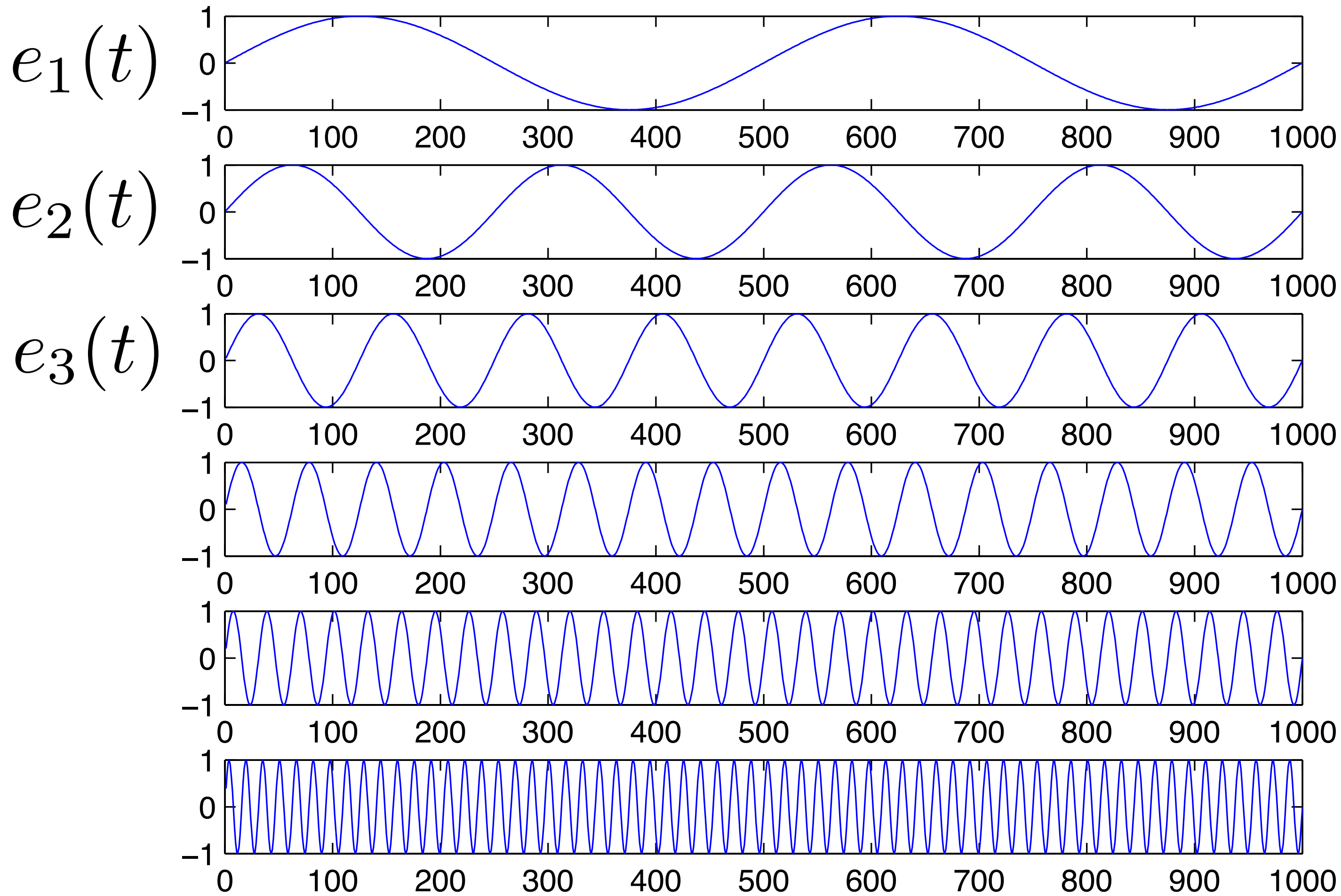
Base orthogonale

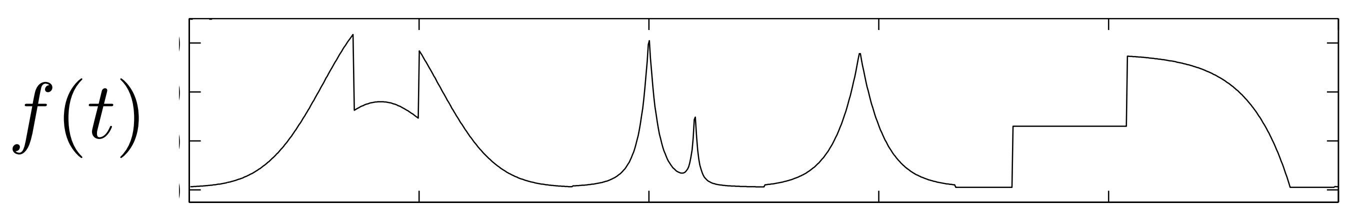


$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \, e_k(t)$$

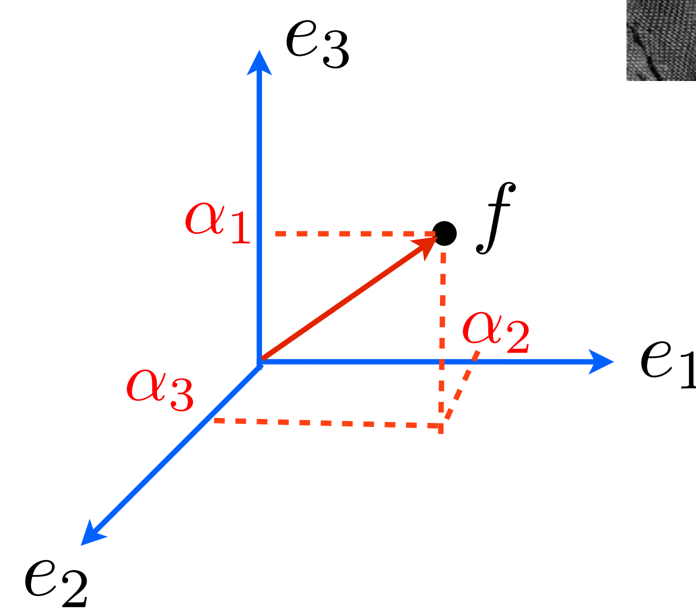
$$\alpha_k = \int f(t)\, e_k(t)\, dt$$

Base de Fourier: 1810





Base orthogonale



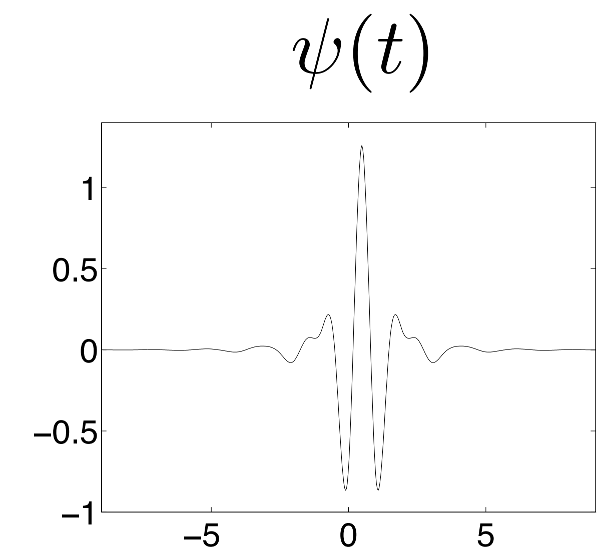
$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \, e_k(t)$$

$$\alpha_k = \int f(t) \, e_k(t) \, dt$$

- Analyse harmonique: liens entre les propriétés de f et des α_k

Les Ondelettes

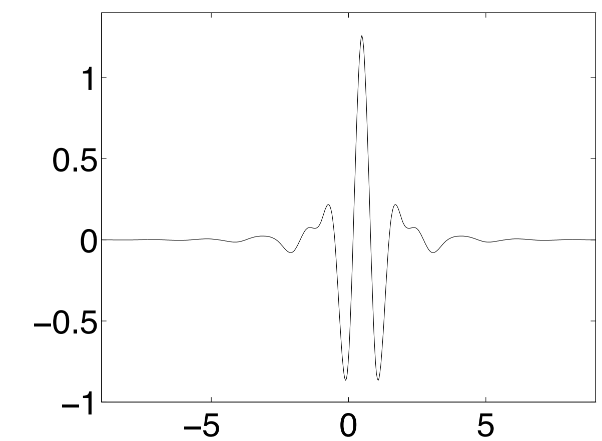
Les Ondelettes



Une note de musique est une ondelette

Les Ondelettes

$\psi(t)$

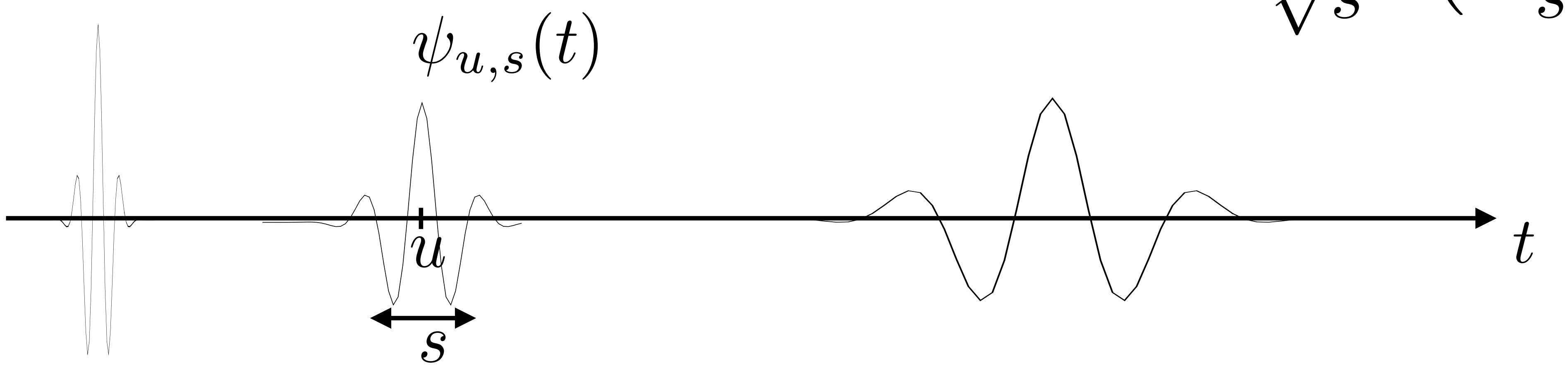


Une note de musique est une ondelette

Translation et dilatation:

$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}}\psi\Big(\frac{t-u}{s}\Big)$$

$\psi_{u,s}(t)$



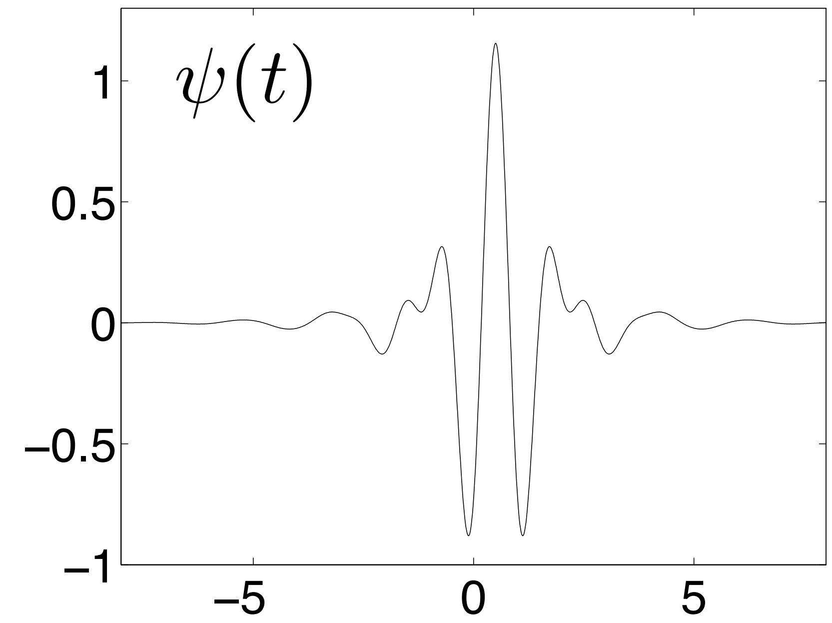
Bases d'Ondelettes de Meyer

Théorème Il existe des ondelettes $\psi(t)$ régulières et localisées

telles que $$\left\{\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\psi(\frac{t-2^j n}{2^j})\right\}_{(j,n)\in\mathbb{Z}^2}$$

est une base orthonormale des fonctions de $\mathbf{L^2}$ d'énergie finie.

Ondelette de Meyer



Bases d'Ondelettes de Meyer

Théorème Il existe des ondelettes $\psi(t)$ régulières et localisées

telles que $$\left\{\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right)\right\}_{(j,n)\in\mathbb{Z}^2}$$

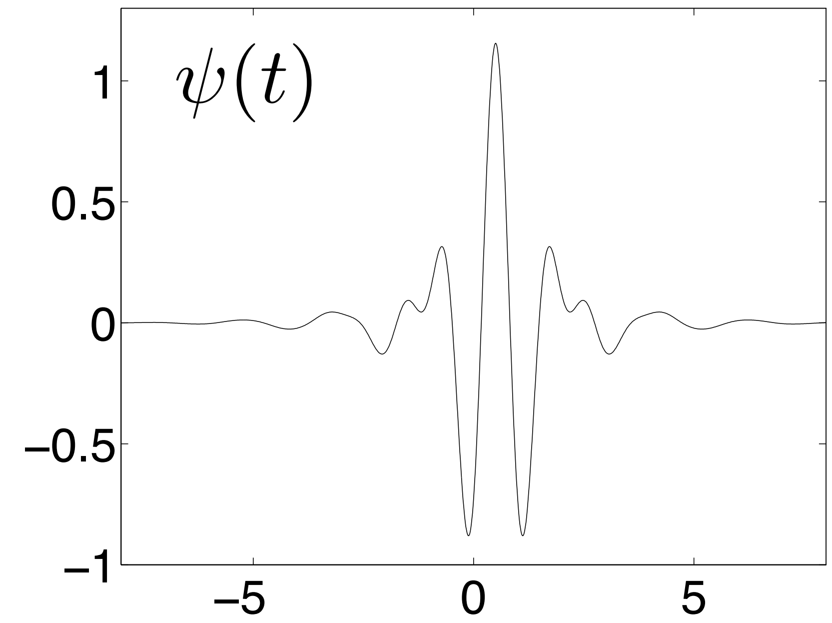
est une base orthonormale des fonctions de $\mathbf{L^2}$ d'énergie finie.

$$f(t) = \sum_{j,n} \alpha_{j,n}\, \psi_{j,n}(t)$$

Coefficients d'ondelettes:

$$\alpha_{j,n} = \int f(t)\, \psi_{j,n}(t)\, dt$$

Ondelette de Meyer



Bases d'Ondelettes de Meyer

Théorème Il existe des ondelettes $\psi(t)$ régulières et localisées

telles que $$\left\{\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right)\right\}_{(j,n)\in\mathbb{Z}^2}$$

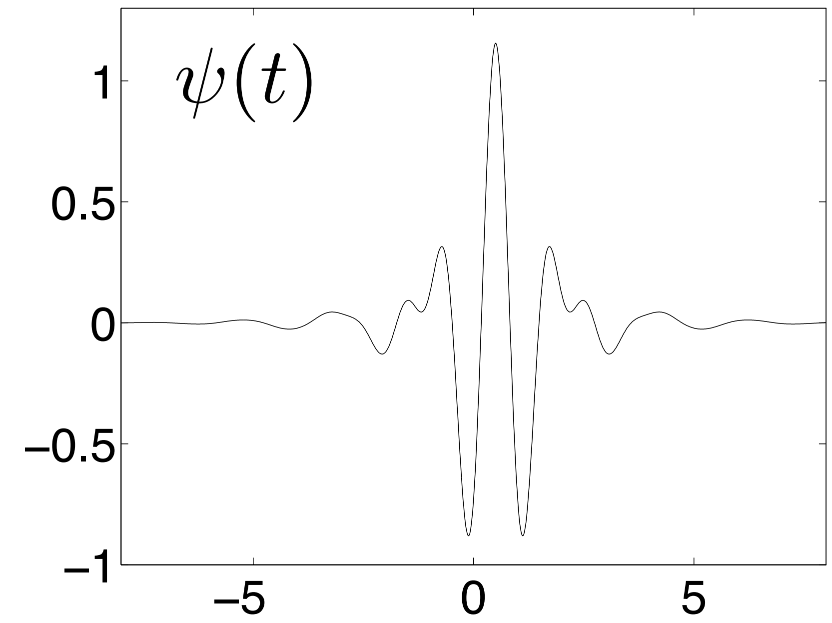
est une base orthonormale des fonctions de $\mathbf{L^2}$ d'énergie finie.

$$f(t) = \sum_{j,n} \alpha_{j,n}\, \psi_{j,n}(t)$$

Coefficients d'ondelettes:

$$\alpha_{j,n} = \int f(t)\, \psi_{j,n}(t)\, dt$$

Ondelette de Meyer



- Analyse harmonique: *Littlewood-Paley, Calderon, Zygnund*

Bases d'Ondelettes de Meyer

Théorème Il existe des ondelettes $\psi(t)$ régulières et localisées

telles que $$\left\{\psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}}\psi\left(\frac{t-2^j n}{2^j}\right)\right\}_{(j,n)\in\mathbb{Z}^2}$$

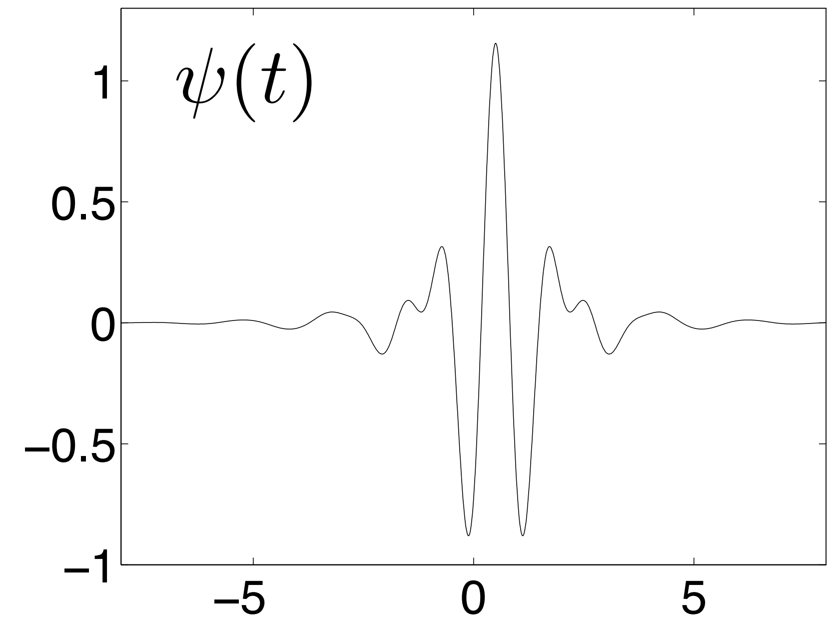
est une base orthonormale des fonctions de $\mathbf{L^2}$ d'énergie finie.

$$f(t) = \sum_{j,n} \alpha_{j,n}\, \psi_{j,n}(t)$$

Coefficients d'ondelettes:

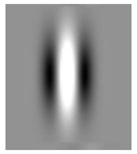
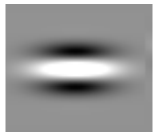
$$\alpha_{j,n} = \int f(t)\, \psi_{j,n}(t)\, dt$$

Ondelette de Meyer



- Analyse harmonique: *Littlewood-Paley, Calderon, Zygnund*
- **Ouverture:** quelles ondelettes, quelles sont leurs propriétés ?

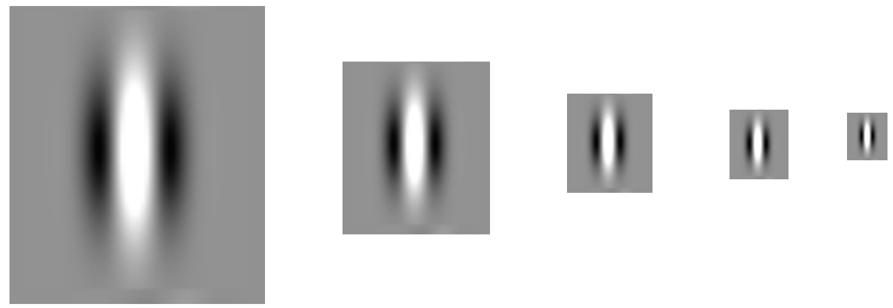
Bases d'Ondelettes d'Images

Ondelettes bidimensionelles pour des images:  

Bases d'Ondelettes d'Images

Ondelettes bidimensionelles pour des images: 

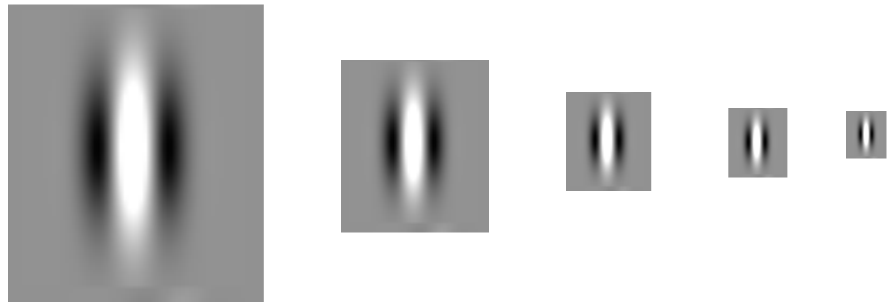
Dilatées:
Translatées



Bases d'Ondelettes d'Images

Ondelettes bidimensionelles pour des images: 

Dilatées:
Translatées

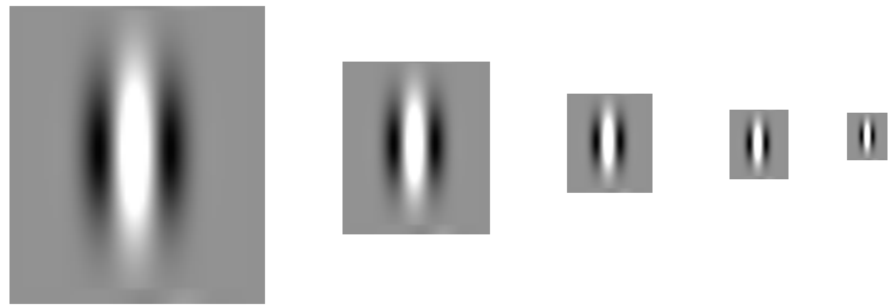


Base orthogonale: $$f = \sum_{j,n} {\color{red}\alpha_{j,n}} \, \psi_{j,n}$$

Bases d'Ondelettes d'Images

Ondelettes bidimensionelles pour des images: 

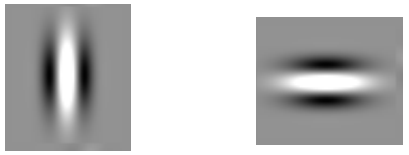
Dilatées:
Translatées

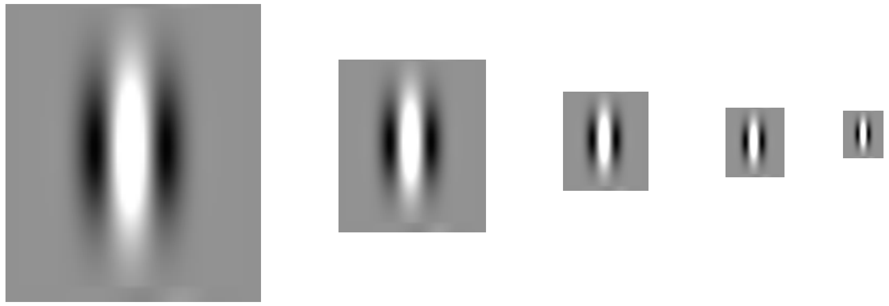


Base orthogonale: $f = \sum_{j,n} \color{red}{\alpha_{j,n}} \, \psi_{j,n}$

Image f

Bases d'Ondelettes d'Images

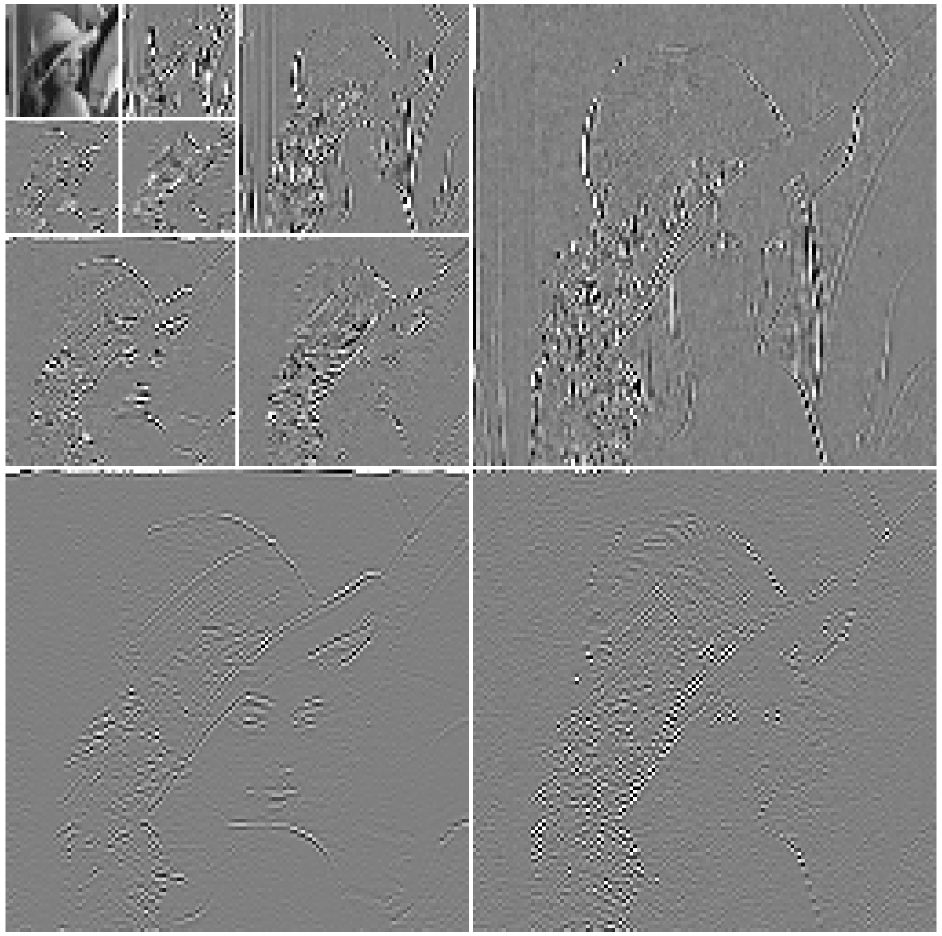
Ondelettes bidimensionelles pour des images: 

Dilatées:
Translatées 

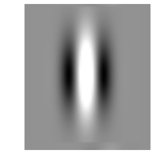
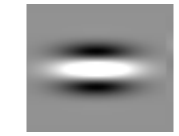
Base orthogonale: $f = \sum_{j,n} {\color{red}\alpha_{j,n}} \, \psi_{j,n}$

Image f

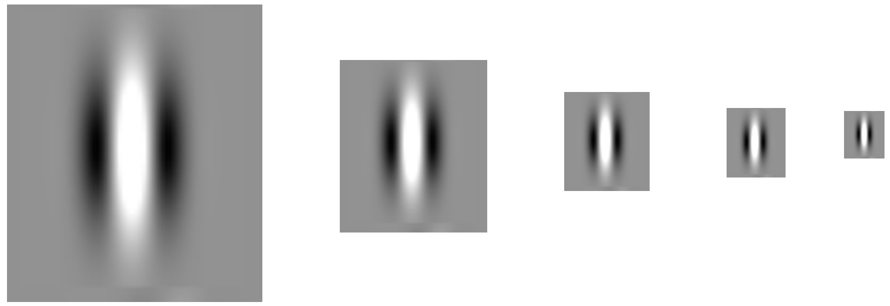
Coefficients d'ondelettes ${\color{red}\alpha_{j,n}}$



Bases d'Ondelettes d'Images

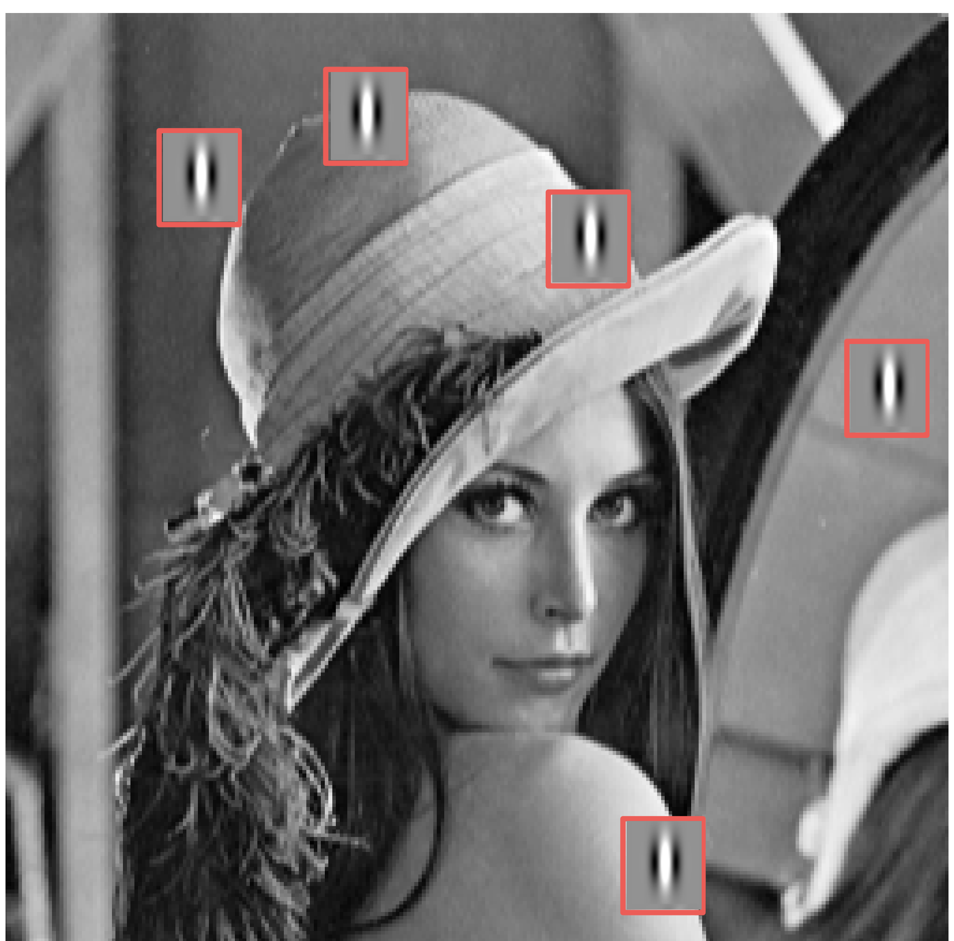
Ondelettes bidimensionelles pour des images:  

Dilatées:
Translatées

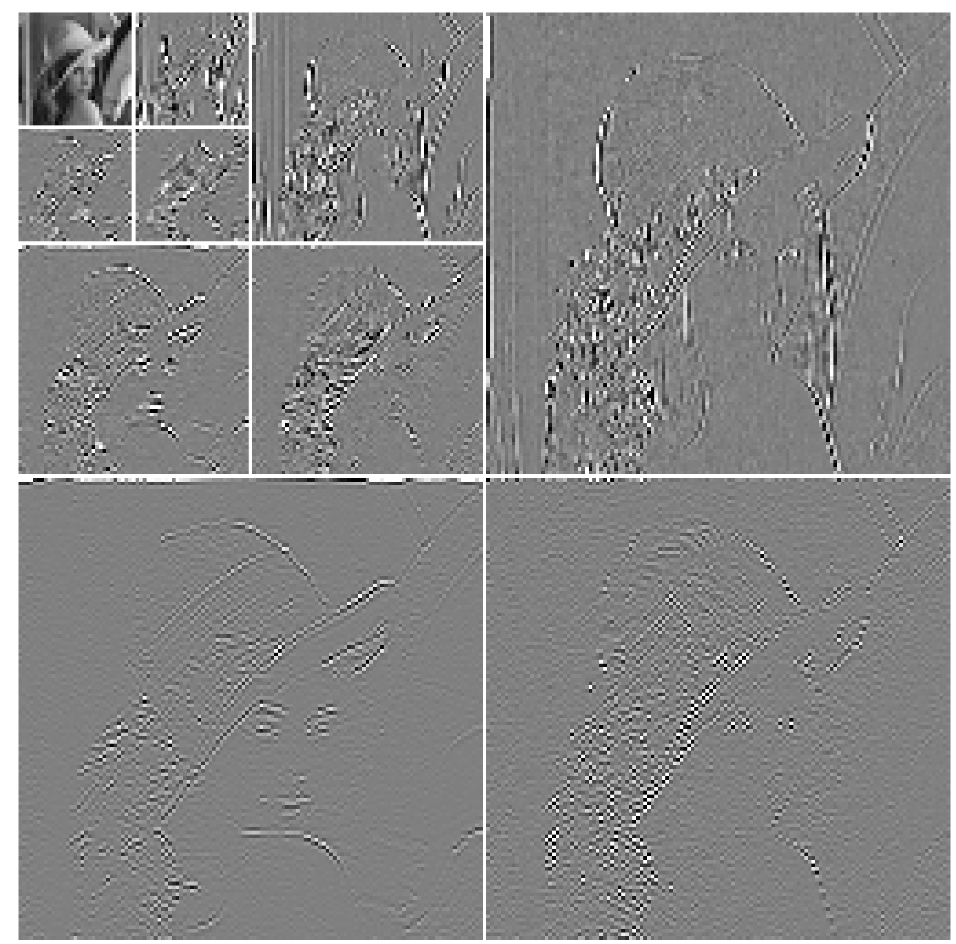


Base orthogonale: $f = \sum_{j,n} \alpha_{j,n} \, \psi_{j,n}$

Image f



Parcimonieux
Coefficients d'ondelettes $\alpha_{j,n}$



Compression JPEG-2000

256 niveaux de gris
codés sur 8 bits

Compression JPEG-2000

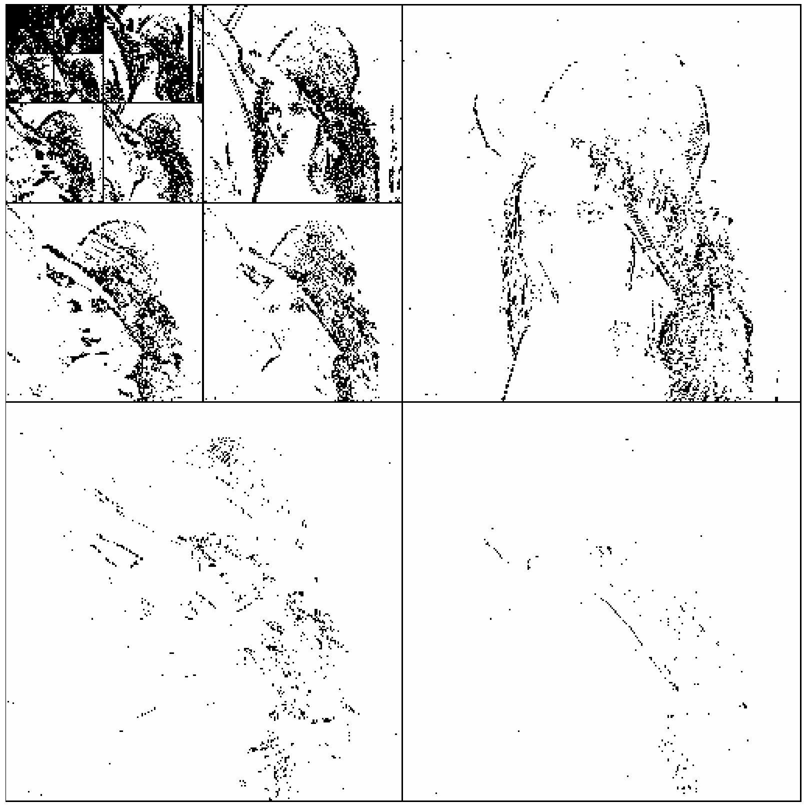
256 niveaux de gris
codés sur 8 bits

2 niveaux de gris
codés sur 1 bit
compression par 8

Compression JPEG-2000

256 niveaux de gris
codés sur 8 bits

Coefficients non-nuls

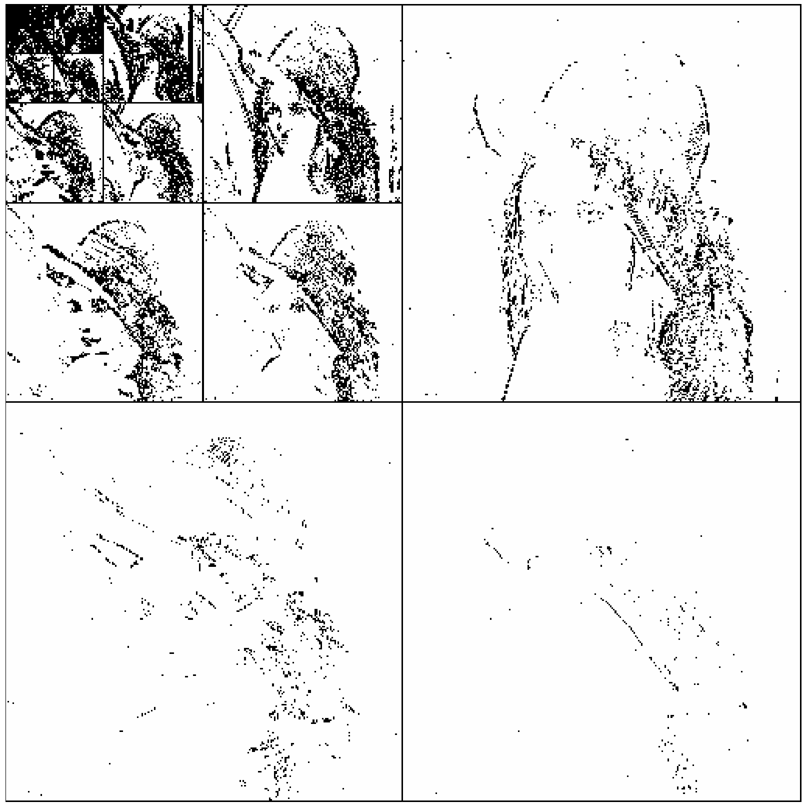


2 niveaux de gris
codés sur 1 bit
compression par 8

Compression JPEG-2000

256 niveaux de gris
codés sur 8 bits

Coefficients non-nuls



compression par 40

Débruitage d'Images

Image
bruitée

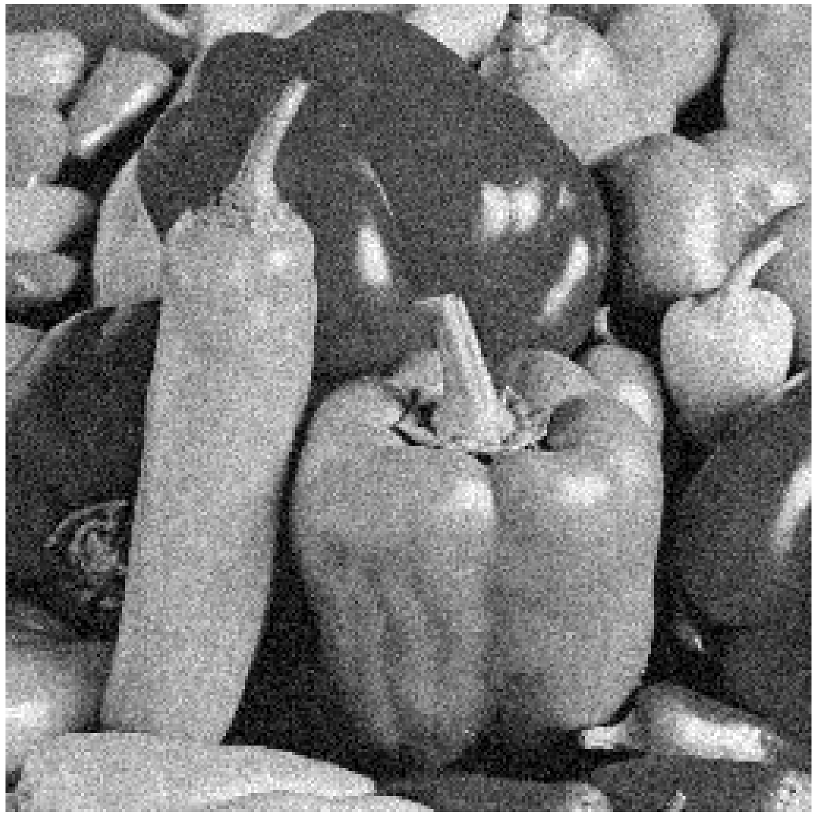


Image
originale

Débruitage d’Images

Image
bruitée

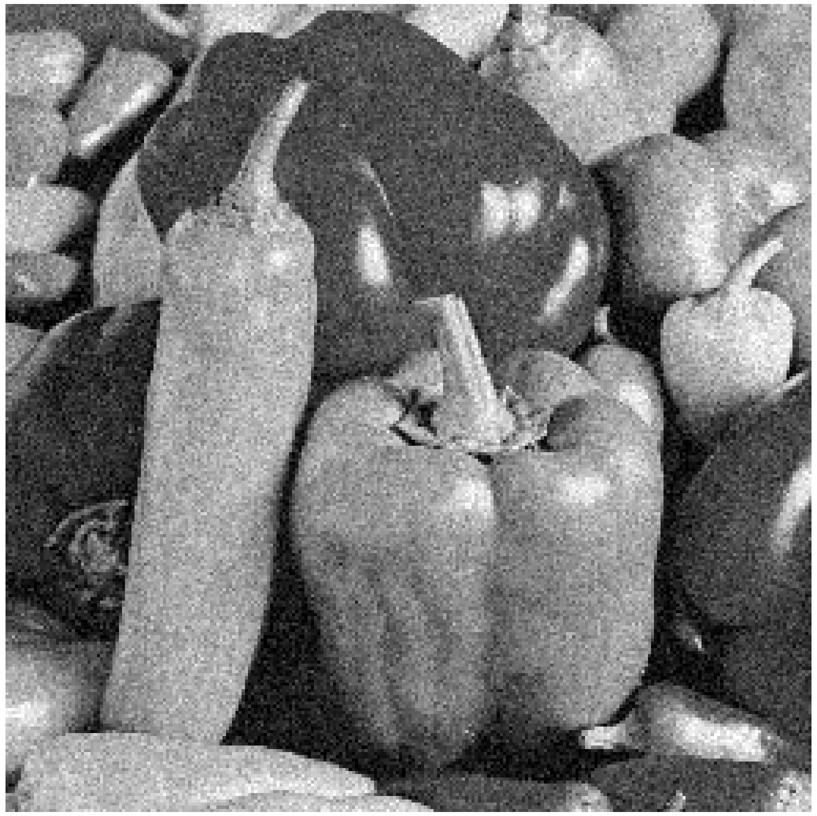
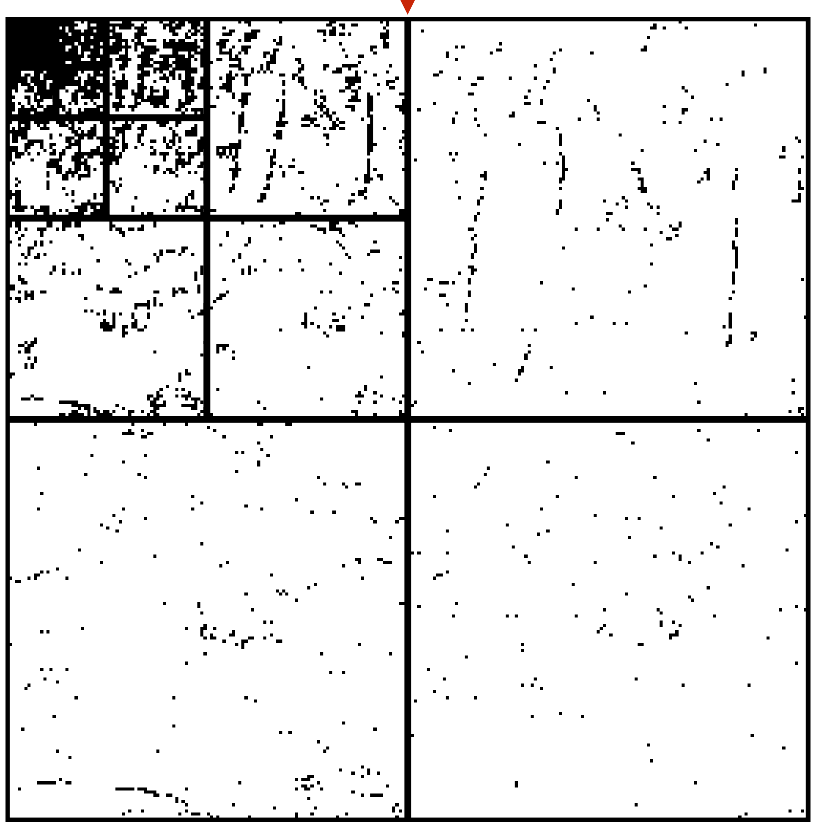


Image
originale

Ondelettes et seuillage

Coefficients
d’ondelettes
seuillés



Débruitage d'Images

Image bruitée

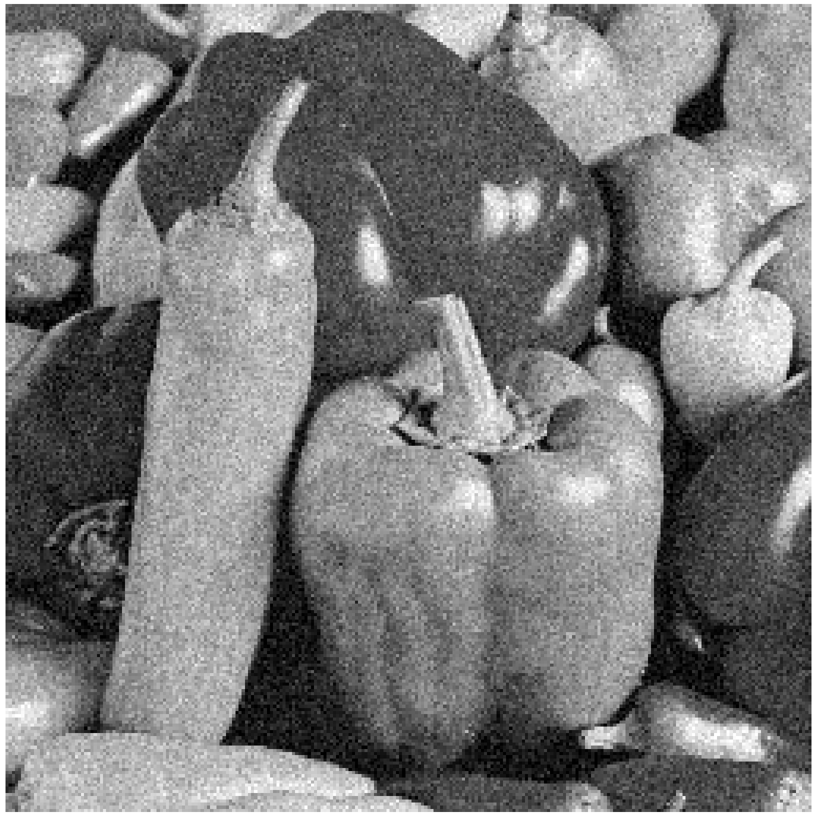
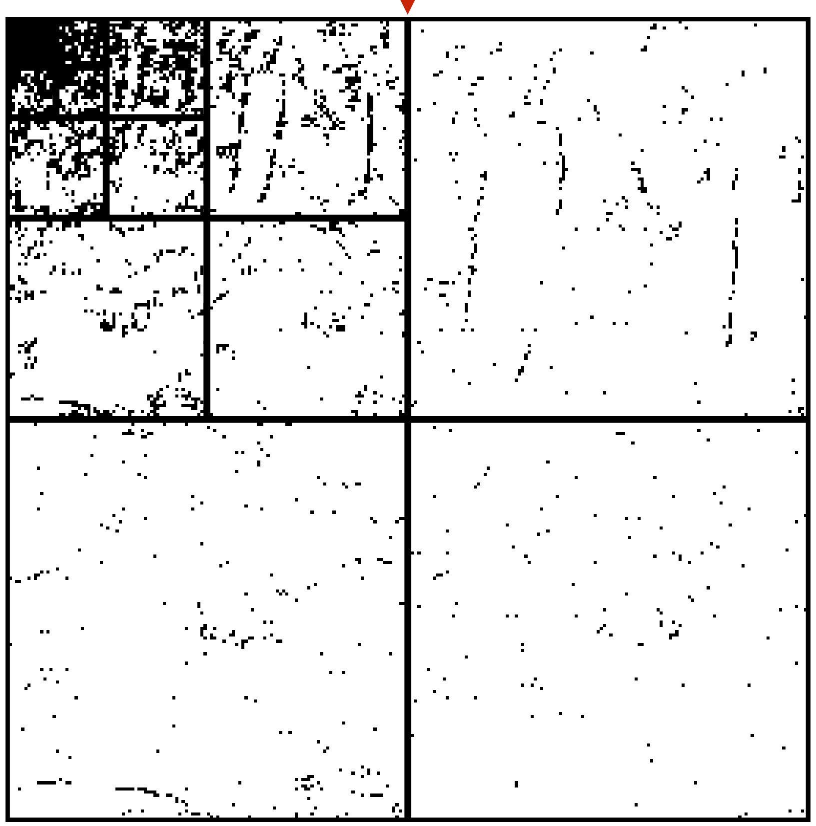


Image originale

Ondelettes et seuillage

Coefficients d'ondelettes seuillés



Reconstruction

Un Impact Considérable

- En mathématiques: analyse harmonique, EDP, théorie de l'approximation, statistiques, probabilités

Un Impact Considérable

- En mathématiques: analyse harmonique, EDP, théorie de l'approximation, statistiques, probabilités

- Applications
  - signal/image: compression, débruitage, problèmes inverses, compressed sensing, ondes gravitationnelles…
  - calcul numérique: algorithmes rapides

Un Impact Considérable

- En mathématiques: analyse harmonique, EDP, théorie de l'approximation, statistiques, probabilités

- Applications
  - signal/image: compression, débruitage, problèmes inverses, compressed sensing, ondes gravitationnelles…
  - calcul numérique: algorithmes rapides

- Industriel:
  - nouveau standard de compression JPEG-2000
  - des centaines de brevets applicatifs

Un Impact Considérable

- En mathématiques: analyse harmonique, EDP, théorie de l'approximation, statistiques, probabilités

- Applications
  - signal/image: compression, débruitage, problèmes inverses, compressed sensing, ondes gravitationnelles…
  - calcul numérique: algorithmes rapides

- Industriel:
  - nouveau standard de compression JPEG-2000
  - des centaines de brevets applicatifs
- **Humain**