

# Les Ondelettes:

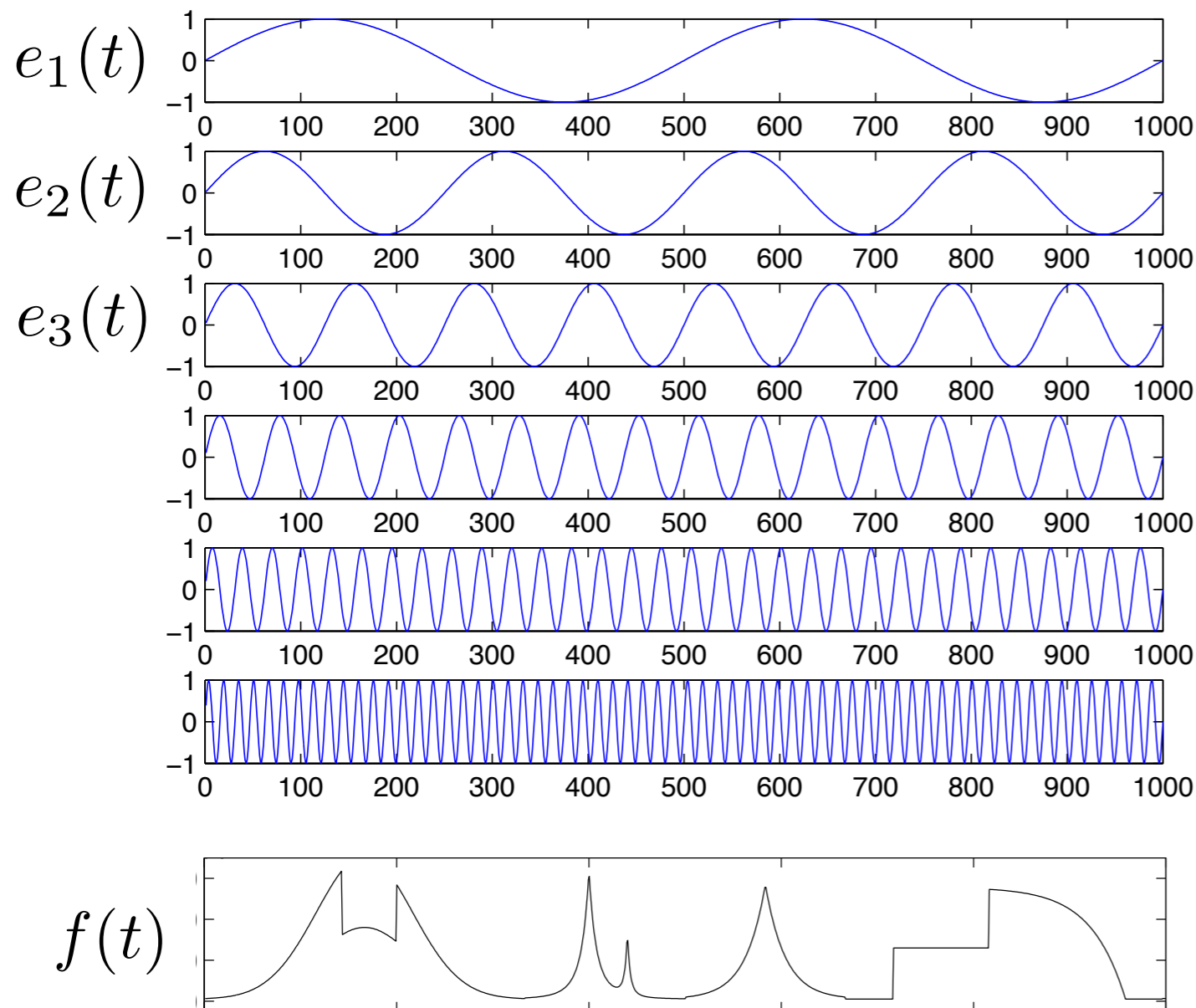
Recontre Maths Pures et Applications

*Prix Abel d'Yves Meyer*



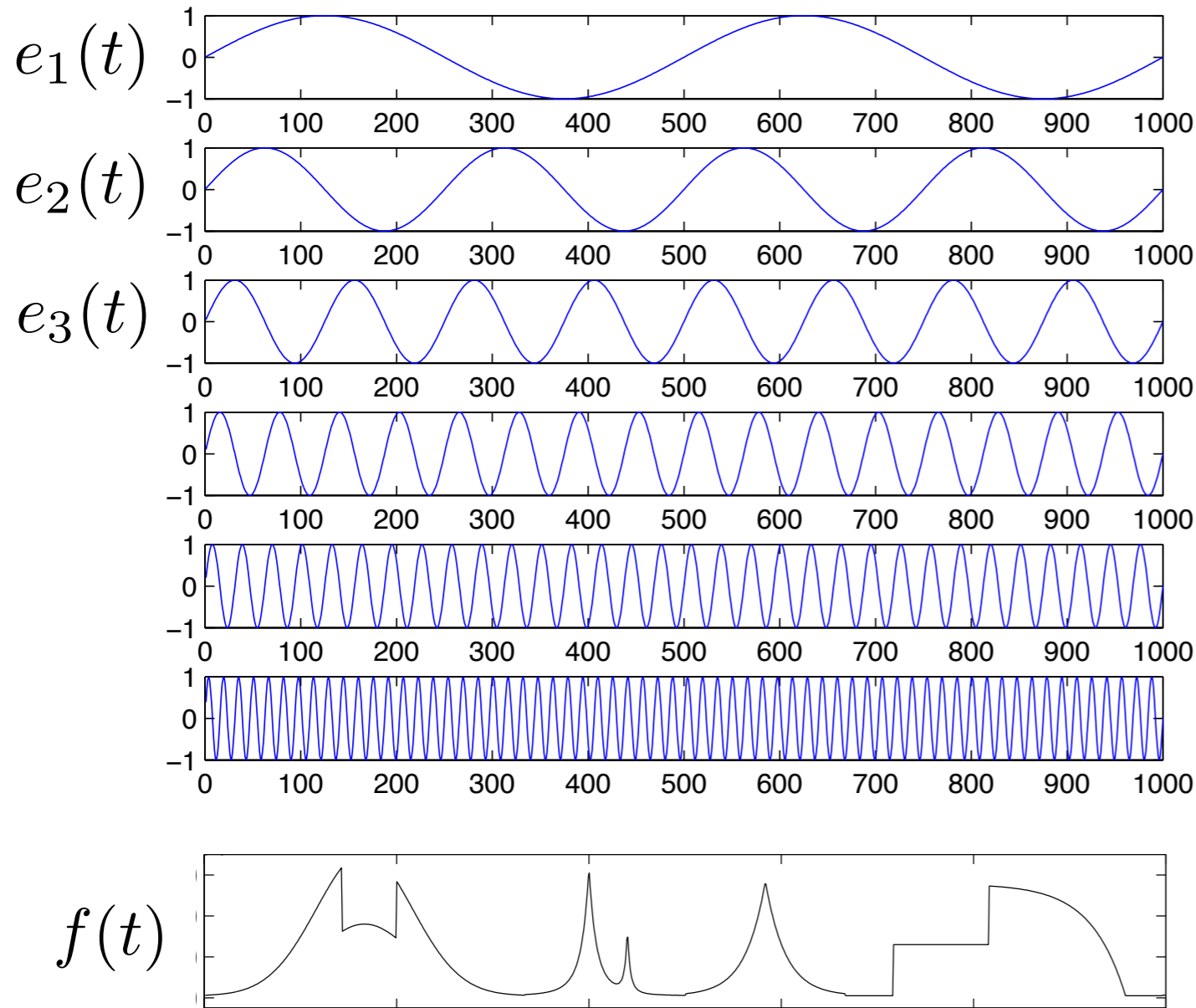
*Stéphane Mallat*  
École Normale Supérieure

# Base de Fourier: 1810

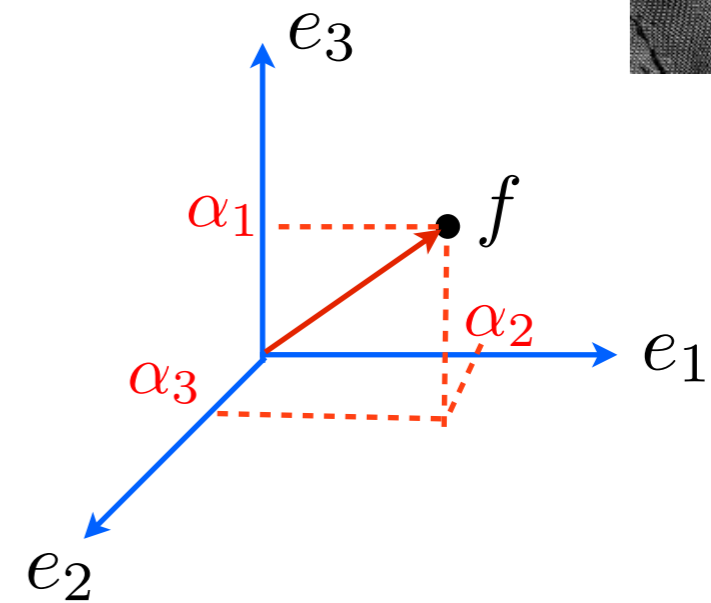


$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k(t)$$

# Base de Fourier: 1810



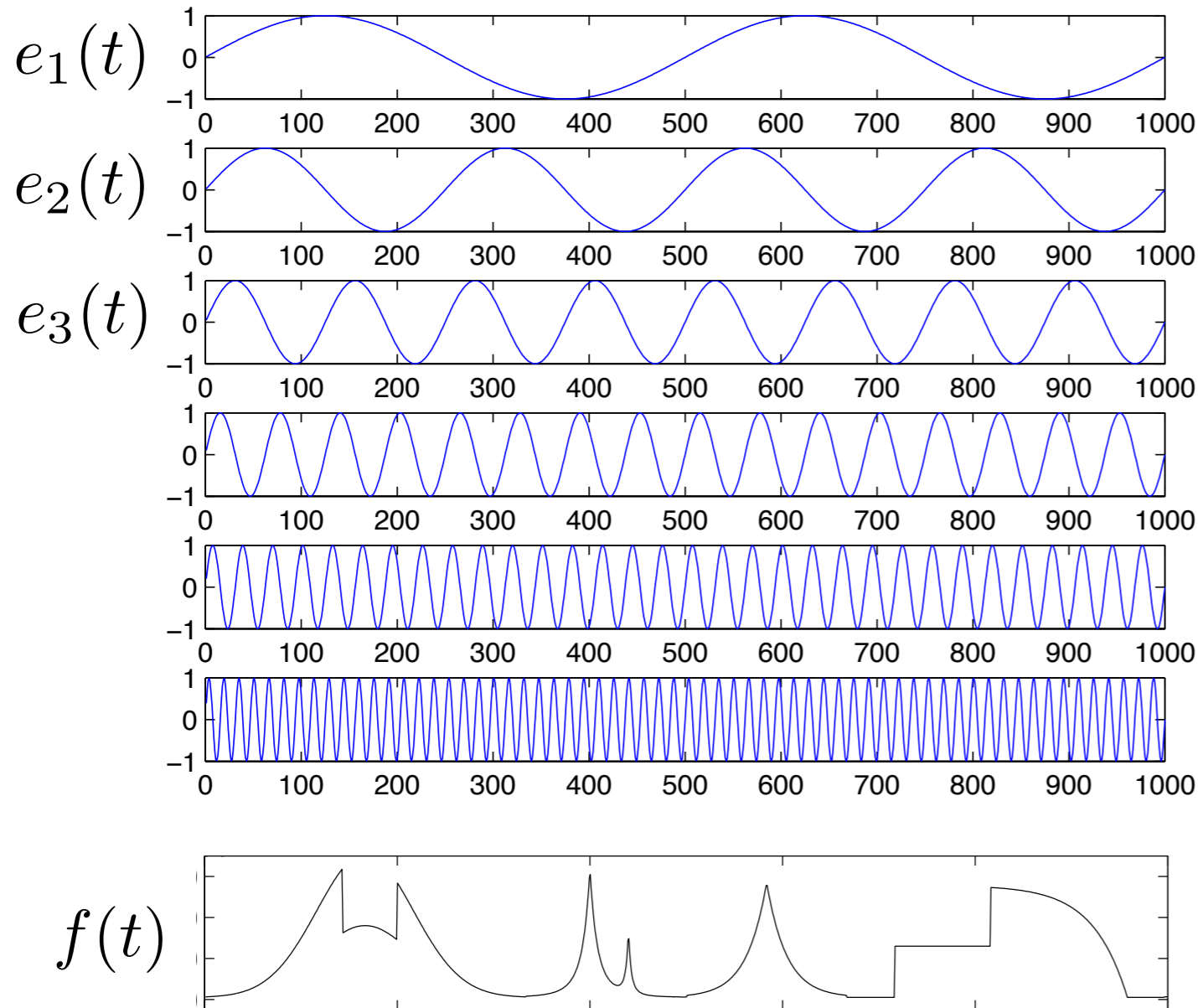
Base orthogonale



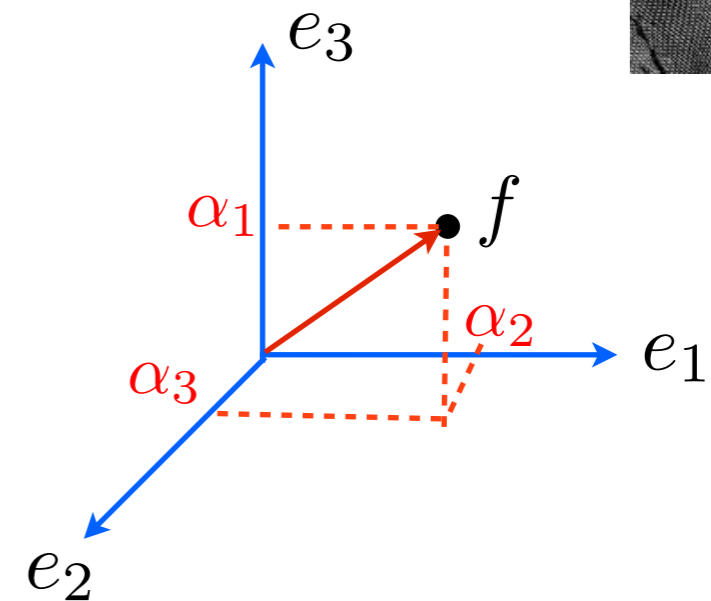
$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k(t)$$

$$\alpha_k = \int f(t) e_k(t) dt$$

# Base de Fourier: 1810



Base orthogonale



$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k e_k(t)$$

$$\alpha_k = \int f(t) e_k(t) dt$$

- Analyse harmonique: liens entre les propriétés de  $f$  et des  $\alpha_k$

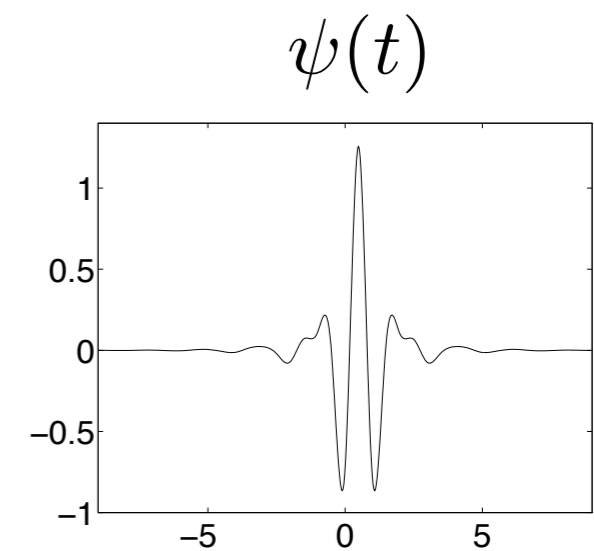
# Les Ondelettes

Musical score for 'Les Ondelettes' in G major, common time (C). The score consists of two staves: a treble clef staff and a bass clef staff. The treble staff contains chords and chordal textures, while the bass staff contains a rhythmic accompaniment of eighth notes. The piece is divided into four measures. The first measure is labeled 'SOL', the second 'DO', the third 'RE7', and the fourth 'SOL'. The treble staff in the first measure shows a G major chord (G-B-D) with a rhythmic pattern of eighth notes. The bass staff shows a similar rhythmic pattern. The second measure shows a D major chord (D-F-A) in the treble and a D major chord (D-F-A) in the bass. The third measure shows a D7 chord (D-F-A-C) in the treble and a D7 chord (D-F-A-C) in the bass. The fourth measure shows a G major chord (G-B-D) in the treble and a G major chord (G-B-D) in the bass.

# Les Ondelettes



Une note de musique est une ondelette

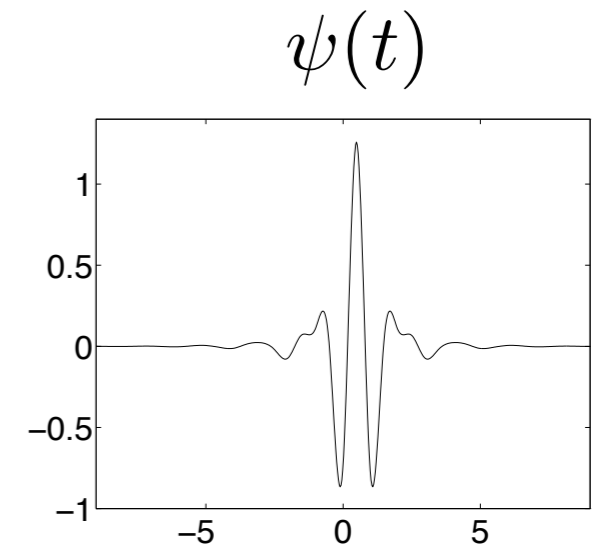


# Les Ondelettes

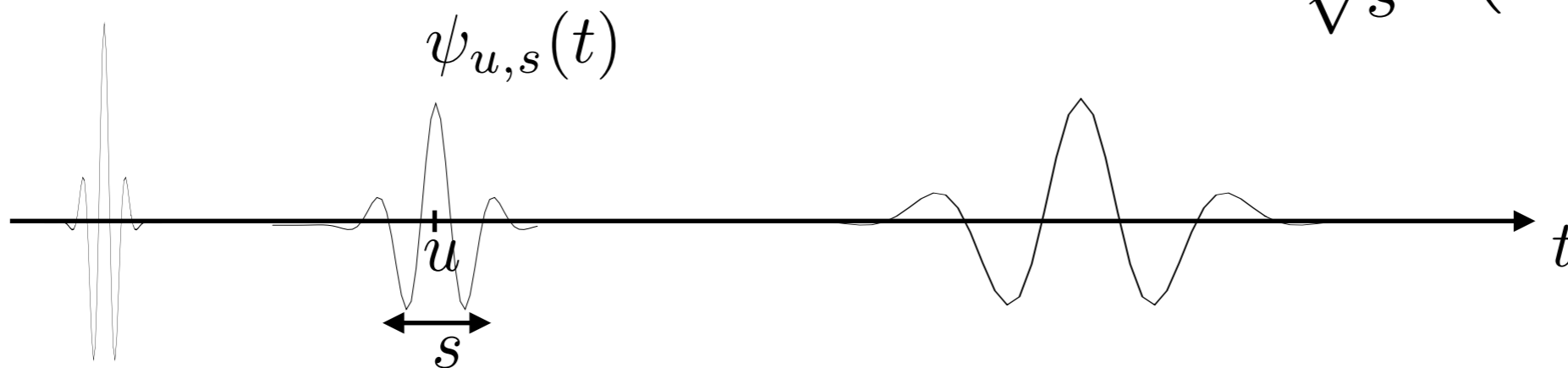


Une note de musique est une ondelette

Translation et dilatation:



$$\psi_{u,s}(t) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right)$$

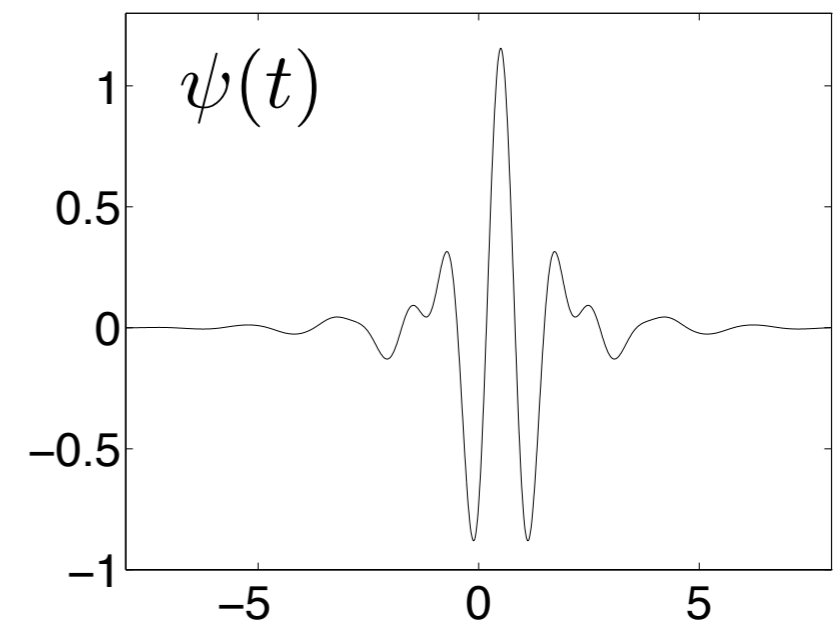


**Théorème** Il existe des ondelettes  $\psi(t)$  régulières et localisées

telles que 
$$\left\{ \psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$$

est une base orthonormale des fonctions de  $\mathbf{L}^2$  d'énergie finie.

Ondelette de Meyer





**Théorème** Il existe des ondelettes  $\psi(t)$  régulières et localisées

telles que 
$$\left\{ \psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$$

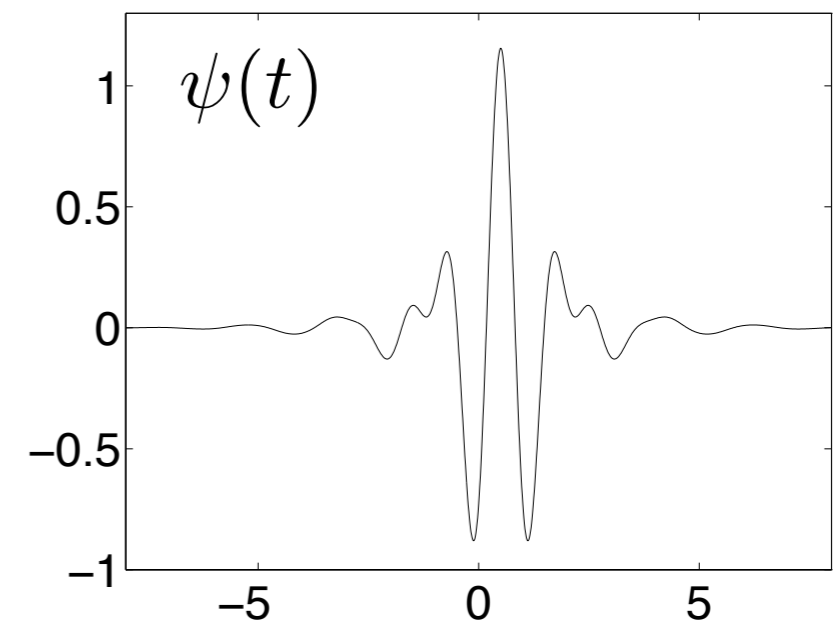
est une base orthonormale des fonctions de  $\mathbf{L}^2$  d'énergie finie.

$$f(t) = \sum_{j,n} \alpha_{j,n} \psi_{j,n}(t)$$

Coefficients d'ondelettes:

$$\alpha_{j,n} = \int f(t) \psi_{j,n}(t) dt$$

Ondelette de Meyer



**Théorème** Il existe des ondelettes  $\psi(t)$  régulières et localisées

telles que 
$$\left\{ \psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$$

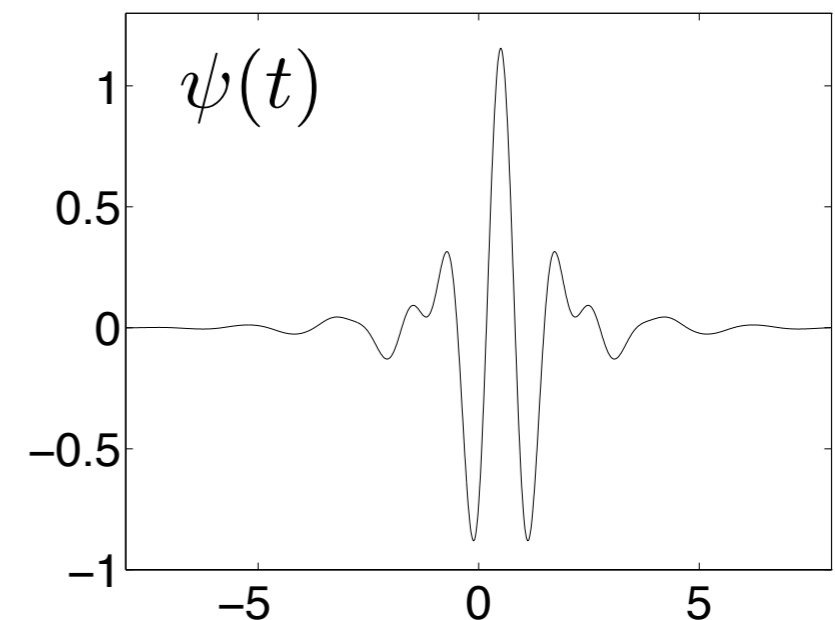
est une base orthonormale des fonctions de  $\mathbf{L}^2$  d'énergie finie.

$$f(t) = \sum_{j,n} \alpha_{j,n} \psi_{j,n}(t)$$

Coefficients d'ondelettes:

$$\alpha_{j,n} = \int f(t) \psi_{j,n}(t) dt$$

Ondelette de Meyer



- Analyse harmonique: *Littlewood-Paley, Calderon, Zygmund*

**Théorème** Il existe des ondelettes  $\psi(t)$  régulières et localisées

telles que 
$$\left\{ \psi_{j,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^j}} \psi\left(\frac{t - 2^j n}{2^j}\right) \right\}_{(j,n) \in \mathbb{Z}^2}$$

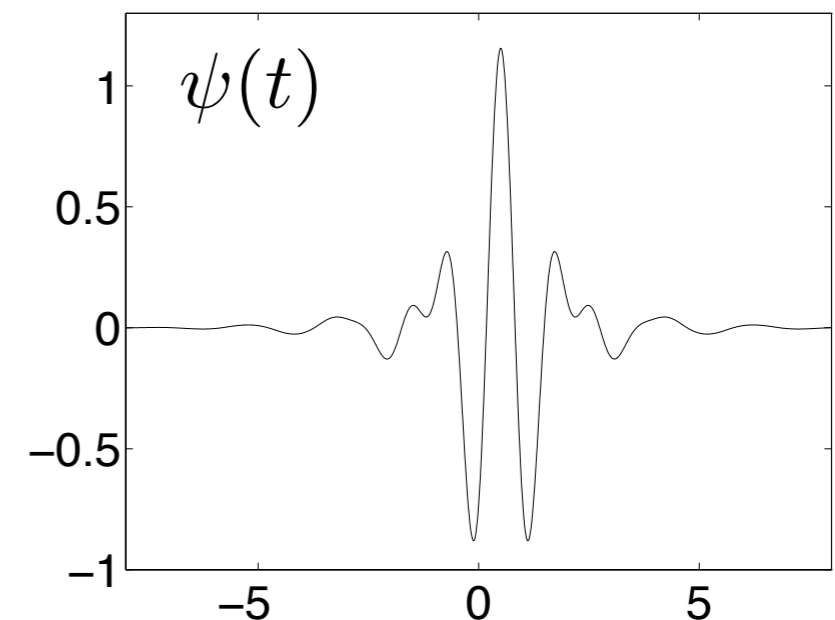
est une base orthonormale des fonctions de  $\mathbf{L}^2$  d'énergie finie.

$$f(t) = \sum_{j,n} \alpha_{j,n} \psi_{j,n}(t)$$

Coefficients d'ondelettes:

$$\alpha_{j,n} = \int f(t) \psi_{j,n}(t) dt$$

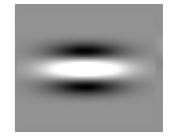
Ondelette de Meyer



- Analyse harmonique: *Littlewood-Paley, Calderon, Zygmund*
- **Ouverture:** quelles ondelettes, quelles sont leurs propriétés ?

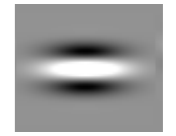
# Bases d'Ondelettes d'Images

Ondelettes bidimensionnelles pour des images:



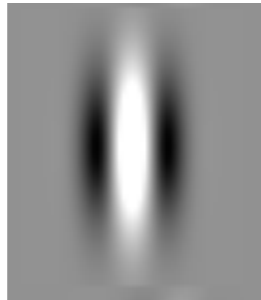
# Bases d'Ondelettes d'Images

Ondelettes bidimensionnelles pour des images:



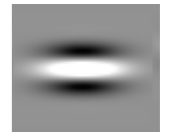
Dilatées:

Translatées

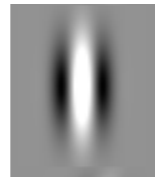
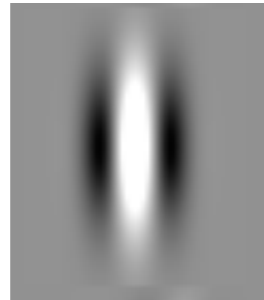


# Bases d'Ondelettes d'Images

Ondelettes bidimensionnelles pour des images:



Dilatées:

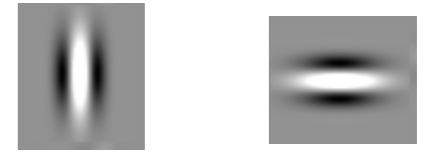


Translatées

Base orthogonale:  $f = \sum_{j,n} \alpha_{j,n} \psi_{j,n}$

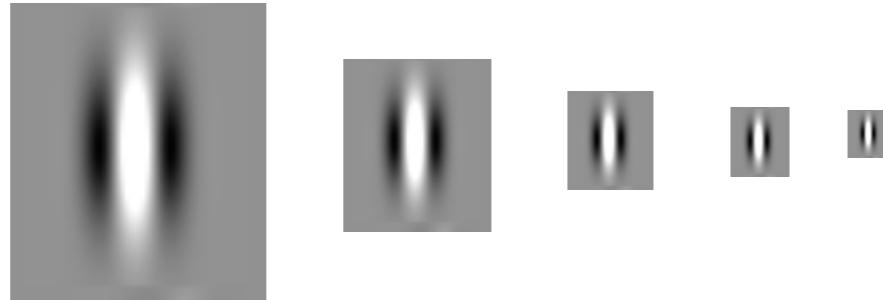
# Bases d'Ondelettes d'Images

Ondelettes bidimensionnelles pour des images:



Dilatées:

Translatées



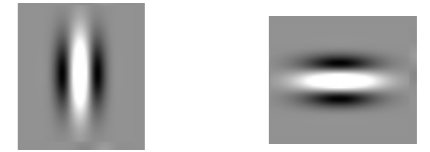
Base orthogonale:  $f = \sum_{j,n} \alpha_{j,n} \psi_{j,n}$

Image  $f$

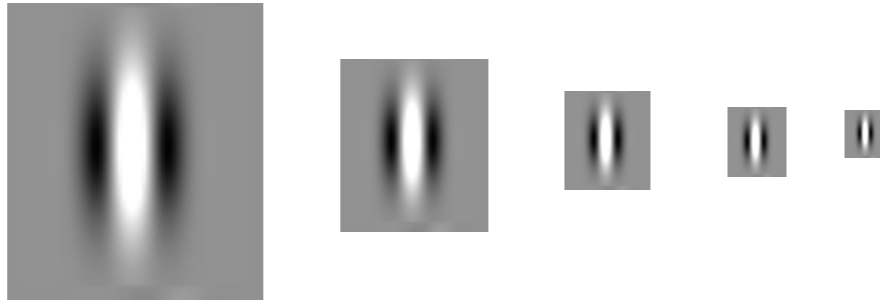


# Bases d'Ondelettes d'Images

Ondelettes bidimensionnelles pour des images:



Dilatées:  
Translatées

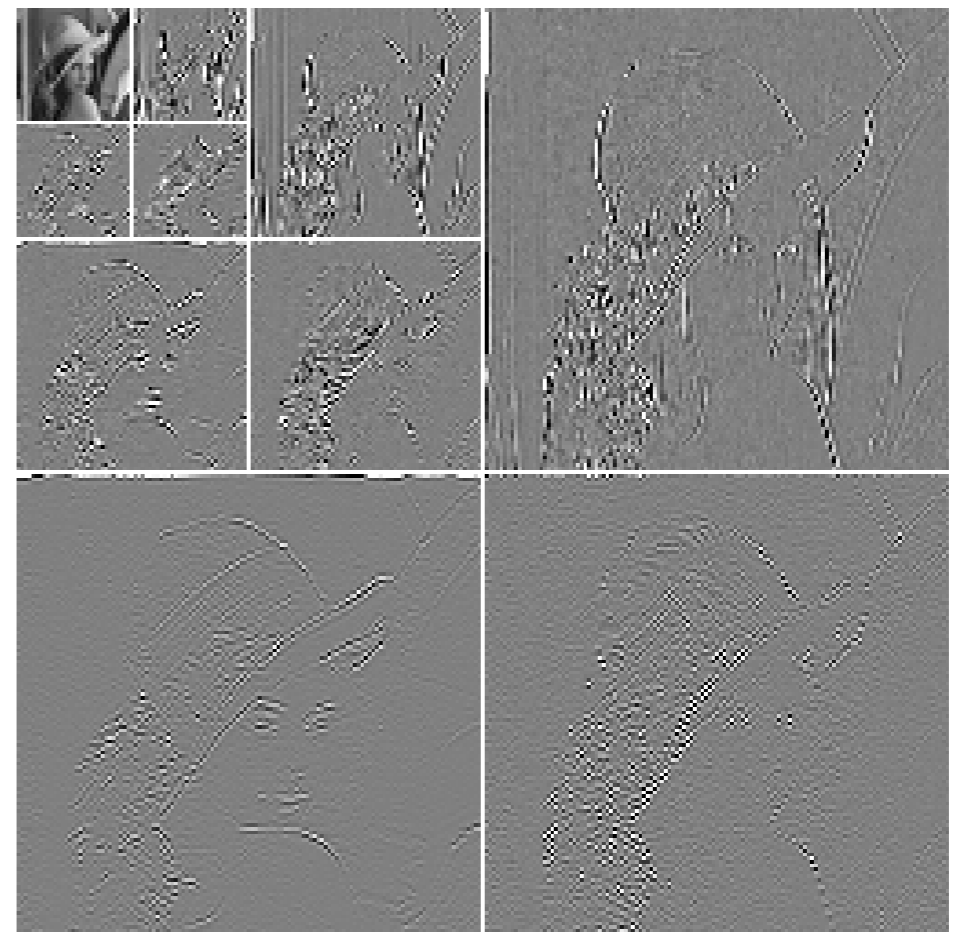


Base orthogonale:  $f = \sum_{j,n} \alpha_{j,n} \psi_{j,n}$

Image  $f$



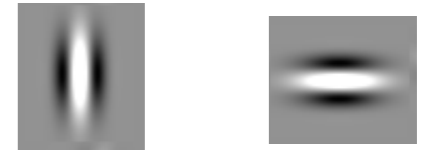
Coefficients d'ondelettes  $\alpha_{j,n}$





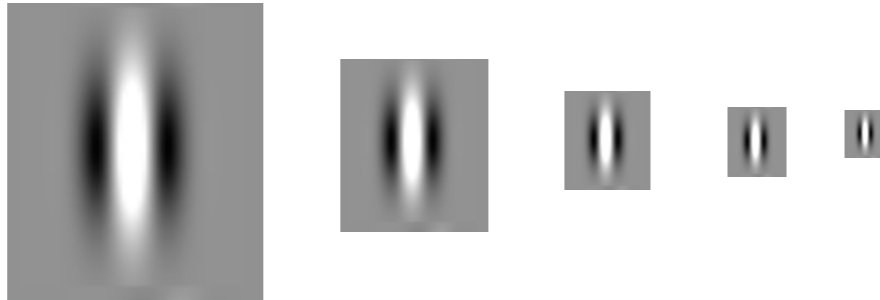
# Bases d'Ondelettes d'Images

Ondelettes bidimensionnelles pour des images:



Dilatées:

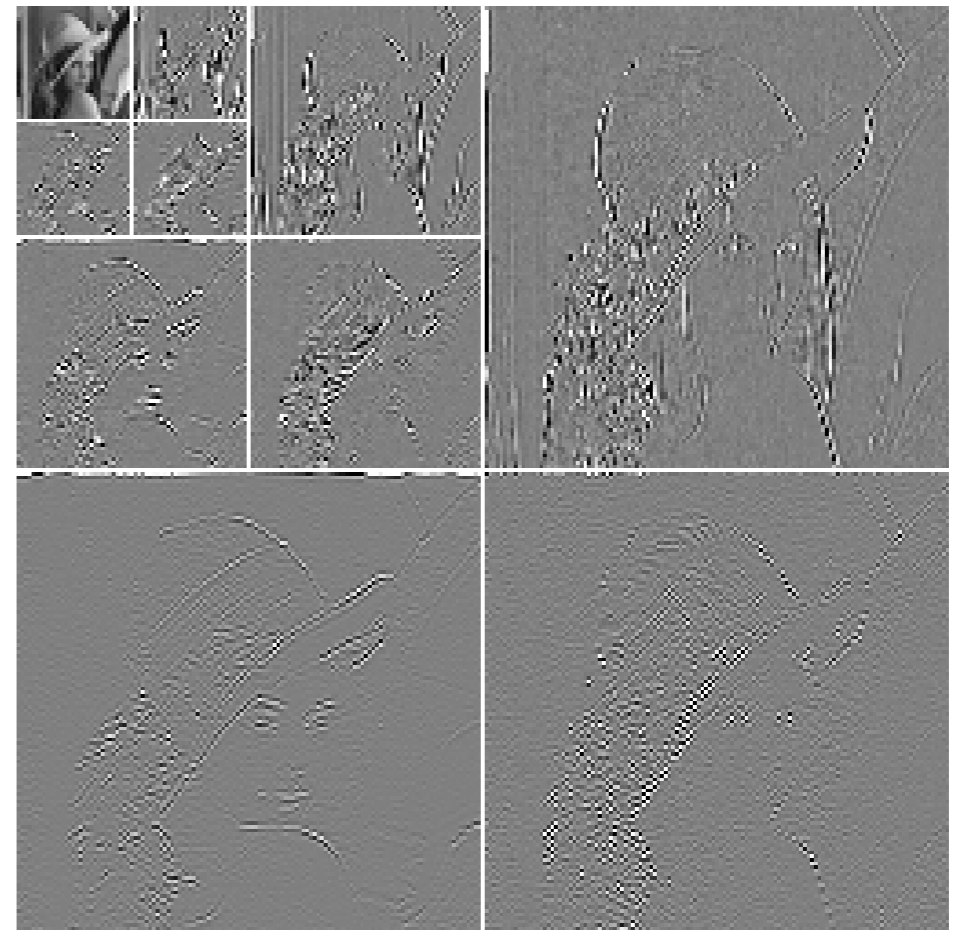
Translatées



Base orthogonale:  $f = \sum_{j,n} \alpha_{j,n} \psi_{j,n}$

Image  $f$

Parcimonieux  
Coefficients d'ondelettes  $\alpha_{j,n}$



256 niveaux de gris  
codés sur 8 bits



256 niveaux de gris  
codés sur 8 bits



2 niveaux de gris  
codés sur 1 bit  
compression par 8

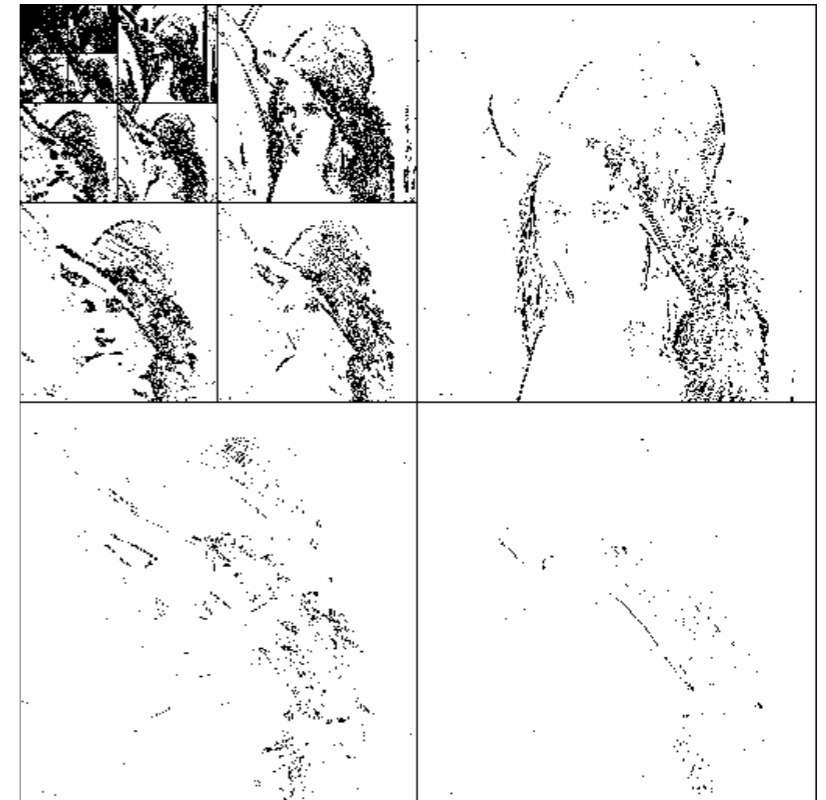


# Compression JPEG-2000

256 niveaux de gris  
codés sur 8 bits



Coefficients non-nuls



2 niveaux de gris  
codés sur 1 bit  
compression par 8

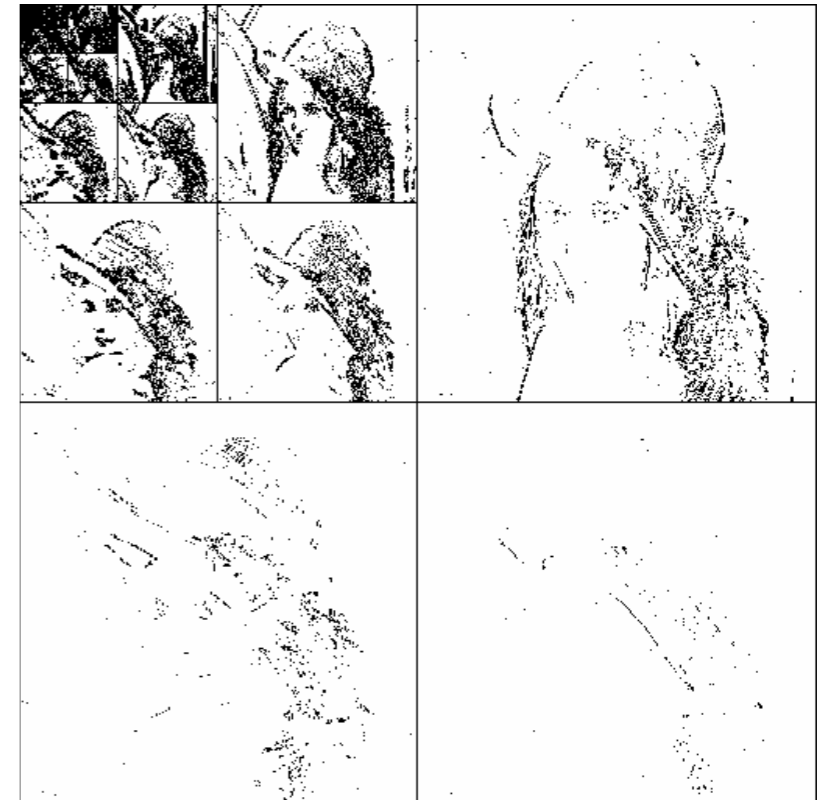


# Compression JPEG-2000

256 niveaux de gris  
codés sur 8 bits



Coefficients non-nuls



compression par 40



Image  
bruitée

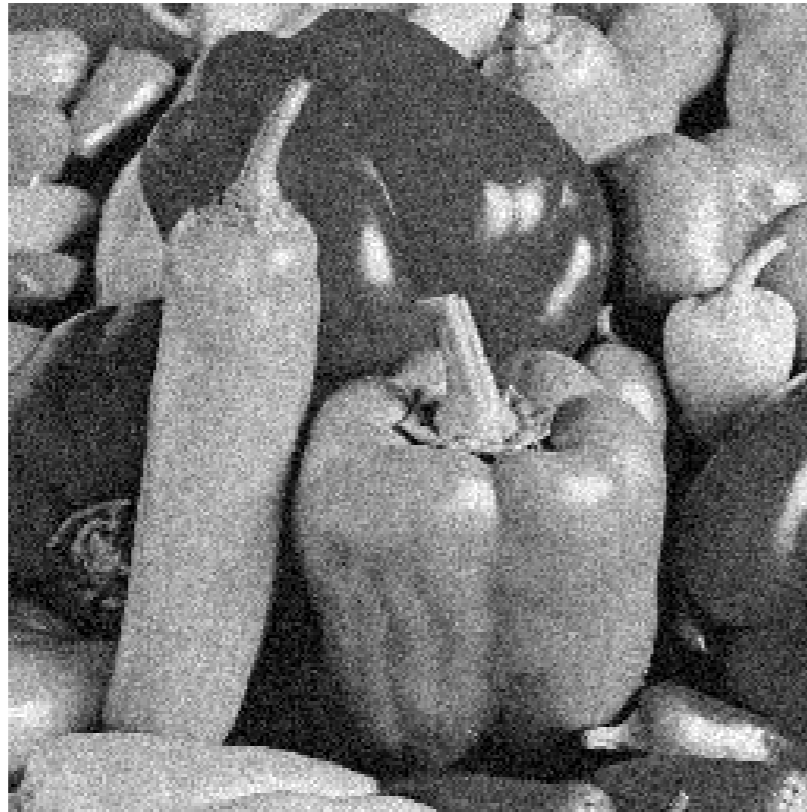
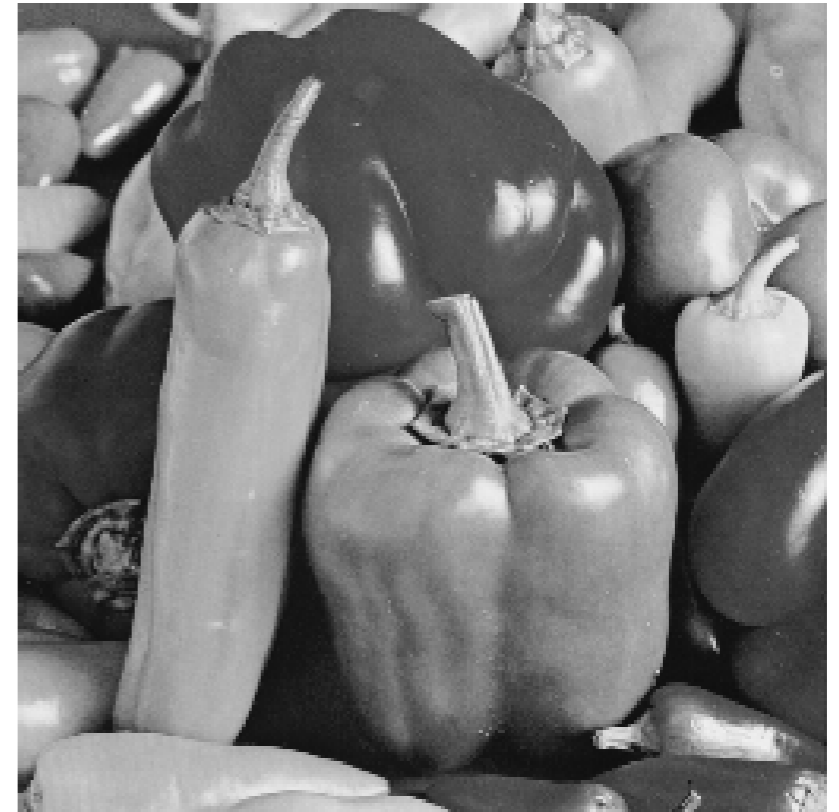


Image  
originale



# Débruitage d'Images

Image  
bruitée

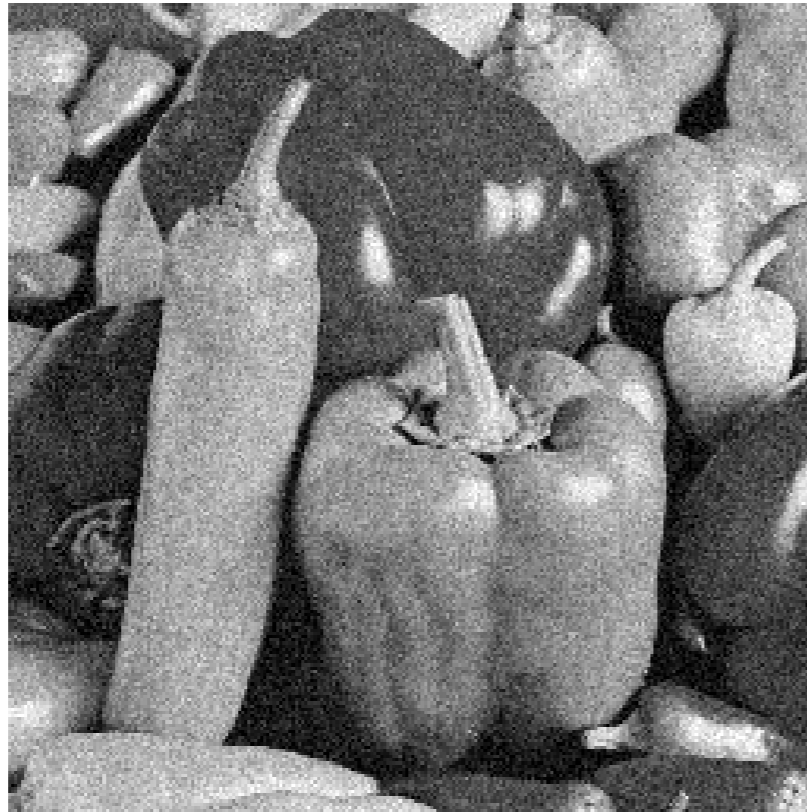
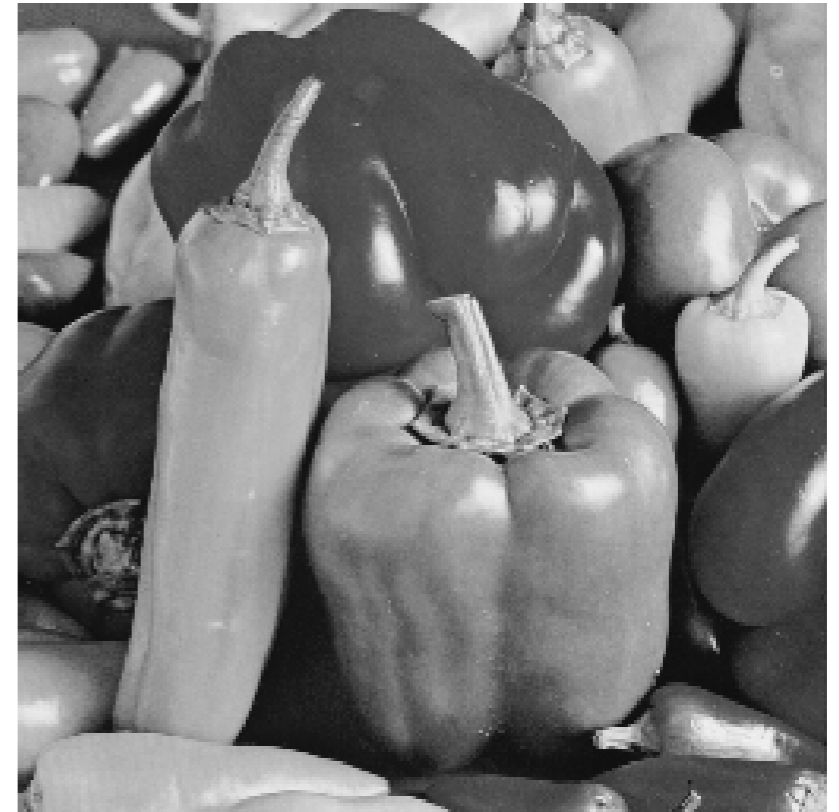
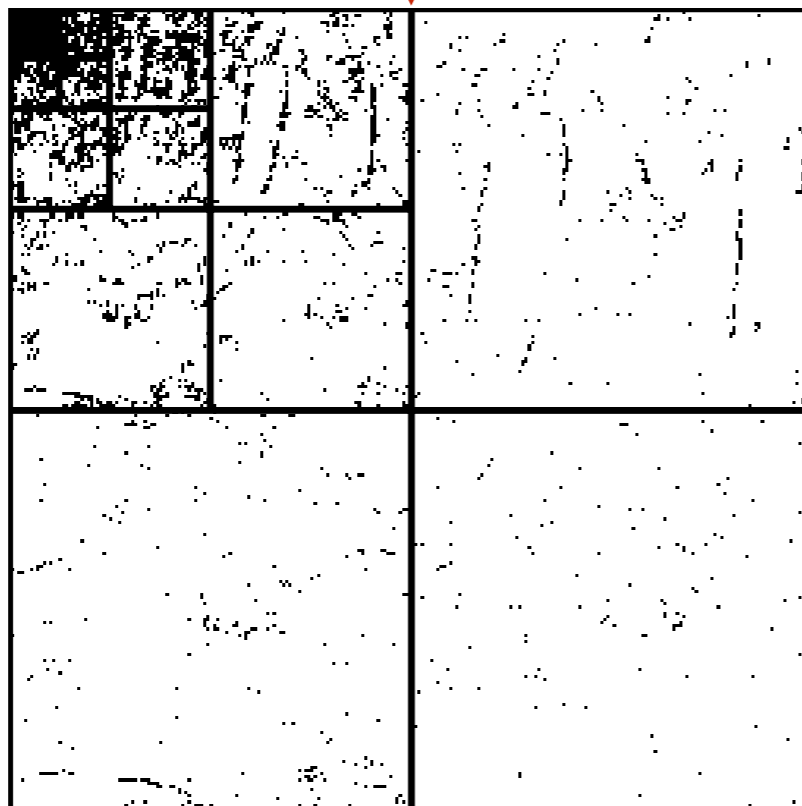


Image  
originale



Ondelettes et seuillage



Coefficients  
d'ondelettes  
seuillés

# Débruitage d'Images

Image  
bruitée

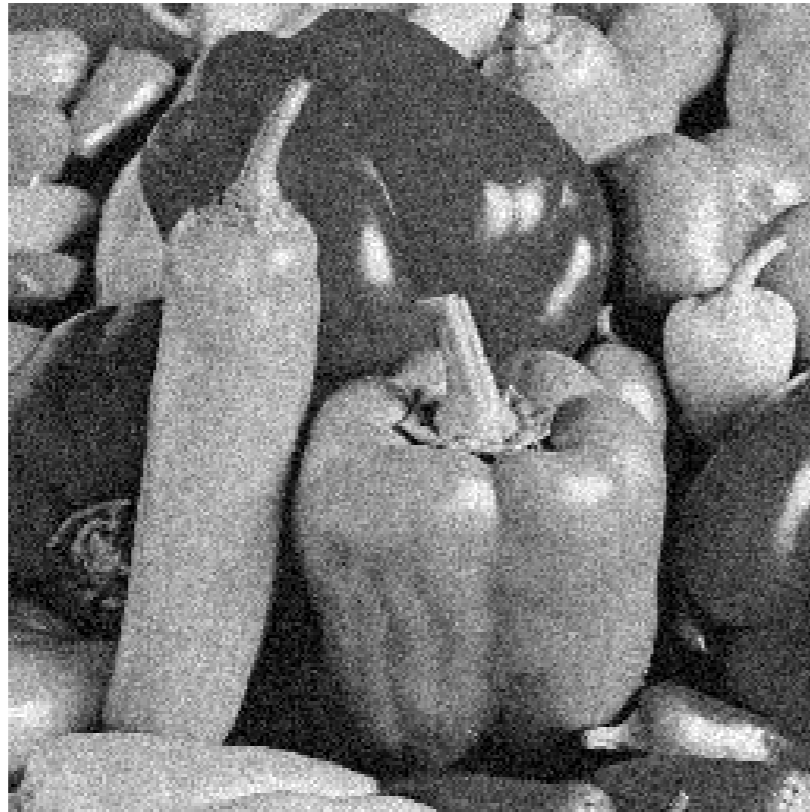
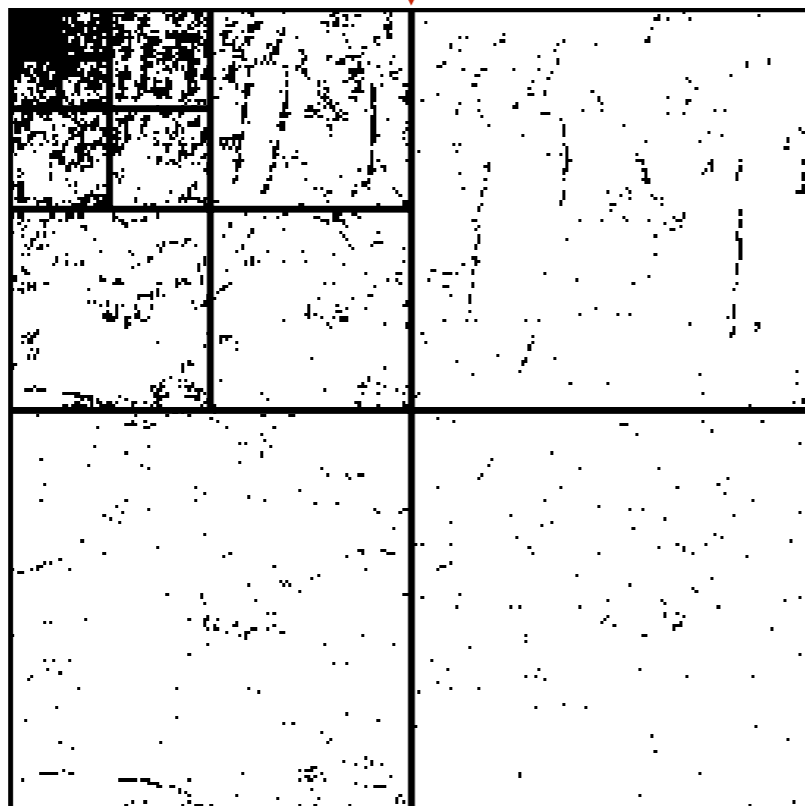


Image  
originale



Ondelettes et seuillage



Coefficients  
d'ondelettes  
seuillés

Reconstruction





# Un Impact Considérable

- En mathématiques: analyse harmonique, EDP, théorie de l'approximation, statistiques, probabilités

- En mathématiques: analyse harmonique, EDP, théorie de l'approximation, statistiques, probabilités
- Applications
  - signal/image: compression, débruitage, problèmes inverses, compressed sensing, ondes gravitationnelles...
  - calcul numérique: algorithmes rapides

- En mathématiques: analyse harmonique, EDP, théorie de l'approximation, statistiques, probabilités
- Applications
  - signal/image: compression, débruitage, problèmes inverses, compressed sensing, ondes gravitationnelles...
  - calcul numérique: algorithmes rapides
- Industriel:
  - nouveau standard de compression JPEG-2000
  - des centaines de brevets applicatifs

- En mathématiques: analyse harmonique, EDP, théorie de l'approximation, statistiques, probabilités
- Applications
  - signal/image: compression, débruitage, problèmes inverses, compressed sensing, ondes gravitationnelles...
  - calcul numérique: algorithmes rapides
- Industriel:
  - nouveau standard de compression JPEG-2000
  - des centaines de brevets applicatifs
- **Humain**